УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор учреждения
образования «Гомельский
государственный университет имени
Франциска Скорины»
_____ А.В.Крук
17.09.2026

ОТЗЫВ ОППОНИРУЮЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ
Учреждения образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»
на диссертацию Чернявского Михаила Михайловича
«Аналитические методы приближенного и явного вычисления
корней полиномов»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки. Содержание и результаты диссертации Чернявского М.М. относятся к отрасли физико-математических наук и соответствуют специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ. Диссертация посвящена разработке явных и приближенных методов вычисления и анализа корней многочленов. Задачи диссертации и методы их решения соответствуют следующим областям исследования паспорта специальности 01.01.01, утвержденного ВАК: теория функций одной и многих вещественных переменных; теория функций одной и многих комплексных переменных, теория приближений и численный анализ.

Научный вклад соискателя в разработку научной проблемы с оценкой его значимости. Основными задачами, исследуемыми в диссертации, являются:

- разработка нового метода приближенного вычисления всех корней произвольного полинома $P(z)$ на базе подсчета пределов отношений определителей, построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана его логарифмической производной $P'(z)/P(z)$;
- вывод явных формул для общих корней пар полиномов и кратных корней полиномов на базе дифференцирования результантов;
- описание локализации и кратностей всех действительных корней для произвольных триномиальных полиномов с действительными коэффициентами.

Пионерские результаты в направлении решения первой из упомянутых задач получены в классических работах Д.Бернулли (1728), Л.Эйлера (1748),

Ж.Л. Лагранжа (1798) и А.К. Эйткена (1928), где для полиномов с вещественными коэффициентами найдены формулы для вычисления произведений упорядоченных по абсолютной величине действительных корней этих полиномов на базе вычисления пределов отношений определителей, составленных из последовательных по номерам решений соответствующих разностных уравнений. Этот метод назван в честь его родоначальника методом Бернулли. В первой обзорной главе диссертации приведено подробное описание истории развития этого метода вплоть до настоящего времени.

Во второй главе диссертации автор разработал новый метод типа метода Бернулли–Эйлера–Лагранжа–Эйткена вычисления всех корней произвольного полинома $P(z)$ на базе подсчета пределов отношений определителей Адамара, построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана логарифмической производной $P'(z)/P(z)$. Обоснование этого метода потребовало скрупулезного анализа (проведенного в п. 2.1 диссертации; теоремы 2.1, 2.2) связей между определителями Адамара и определителями Вандермонда, построенными по корням полинома $P(z)$. В работах предшественников было обнаружено на примерах, что приближения в методе Бернулли могут не сходиться к корню полинома. В диссертации установлены необходимые и достаточные условия сходимости приближений в разработанном методе (теоремы 2.3, 2.4, 2.5, 2.6). Эти результаты, в частности, объясняют эффекты отсутствия сходимости в методе Бернулли. Доказано, что разработанный приближенный метод сходится со скоростью геометрической прогрессии (теоремы 2.3, 2.5), т. е. является очень эффективным.

Приведенный в работе в п. 2.5 пример вычисления корней полинома демонстрирует высокую эффективность разработанного метода при использовании современных систем компьютерной алгебры.

По существу, полученные в главе 2 результаты являются принципиальным продвижением и одновременно завершающими шагом в упомянутой серии результатов, полученных в этом направлении в работах Д. Бернулли, Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа и А. К. Эйткена.

Глава 3 диссертации посвящена выводу новых явных формул для вычисления общих корней пар полиномов и кратных корней полиномов на базе дифференцирования результанта многочленов как функции многих переменных от коэффициентов этих полиномов.

Основополагающие результаты по вычислению единственного общего простого корня двух полиномов, а также единственного корня полинома кратности 2, в терминах частных производных первого порядка от результантов и дискриминантов представлены в главах 3 и 12 монографии И. М. Гельфанда, М. М. Капранова и А. В. Зелевинского (1994, [24] Списка использованных источников). Существенное развитие идей этой книги в направлении поиска формул для кратных корней многочленов приведено в статье И. А. Антиповой, Е. Н. Михалкина и А. К. Циха (2018, [25] Списка

использованных источников). Результаты, полученные в [25], идейно и технически опираются на результаты [24] и используют только производные первого порядка от результантов, что является в [24] фундаментальным условием, так как в ситуации наличия кратных общих корней двух полиномов все частные производные первого порядка равны нулю (теорема 3.1 диссертации) и их использование невозможно. В [24] формулы для вычисления общих корней двух полиномов получены с помощью фундаментальной техники теории двойственности для проективных многообразий, а в [25] для доказательства использован ряд специфических методов алгебры и комплексного анализа, в том числе известные формулы для результантов, теория вычетов и вид полинома на стратах Гильберта.

В диссертации в главе 3 получены принципиально новые результаты в этом направлении. Для результанта $R(f,g)(a,b)$ пары полиномов f и g, обладающих общими корнями, построено тейлоровское разложение по переменным a (коэффициентам f) и по переменным b (коэффициентам g) (теорема 3.2, предложение 3.3, теорема 3.3). Здесь обнаружен неизвестный ранее эффект – при наличии у полиномов f и g общего корня w кратности s для f и кратности p для g разложение в ряд Тейлора для результанта $R(f,g)(a,b)$ по переменным b начинается со слагаемого порядка s, а разложение в ряд Тейлора для $R(f,g)(a,b)$ по переменным a начинается со слагаемого порядка p, причем соответствующие слагаемые ряда Тейлора описываются явно.

На этой базе выведены серии новых явных формул для вычисления общих корней пар полиномов и кратных корней полиномов (теоремы 3.1, 3.8), идейно отличающиеся от формул, полученных в работах предшественников. Качественные отличия серий новых формул от известных ранее продемонстрированы конкретными примерами в разделах 3.1.5 и 3.2.4.

Последняя, четвертая глава диссертации посвящена анализу триномиальных (трехчленных) алгебраических уравнений

$$x^n + px^m + q = 0 \qquad (n>m>0, p \neq 0, q \neq 0).$$

Это очень популярный класс уравнений. Напомним, что среди триномиальных уравнений пятой степени есть уравнения, не разрешимые в радикалах. Последнее наблюдение указывает на богатство и нетривиальность класса триномиальных уравнений. Такие уравнения являются популярным объектом исследований. Только с начала XXI века опубликованы десятки статей, посвященных разным аспектам анализа триномиальных уравнений (обзор дан в первой главе диссертации).

В четвертой главе диссертации разработан новый простой и единообразный метод анализа вещественных корней триномиальных полиномов с вещественными коэффициентами. Метод основан на том факте, что при помощи определенных подстановок трехчленное уравнение приводится к определяющему уравнению с одним параметром, представимым в виде явной функции от коэффициентов первоначального

уравнения, и свойства решений исходного уравнения зависят только от значений этого параметра.

На этой базе проведен полный анализ всех действительных корней для произвольных триномиальных полиномов с действительными коэффициентами и дано явное описание локализации и кратностей таких корней.

Отметим также новое интересное наблюдение, приведенное в теореме 4.7, а именно: в ней установлена явная аналитическая зависимость между модулем и аргументом всех комплексных корней трехчленных алгебраических уравнений произвольной степени с действительными коэффициентами. Нетривиальным фактом является то, что эта связь не зависит от коэффициента p.

Считаем, что вклад соискателя в разработку и теоретическое обоснование аналитических методов приближенного и явного вычисления корней полиномов весьма существенен и достаточно значителен, чтобы присудить соискателю ученую степень кандидата физико-математических наук.

Конкретные научные результаты, за которые соискателю может быть присуждена ученая степень кандидата наук. По нашему мнению, соискателю может быть присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук за:

- разработку нового метода типа метода Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления всех корней произвольного полинома;
- получение серии новых явных формул для общих кратных корней пар полиномов и серии новых формул для кратных корней многочлена на базе дифференцирования результантов;
- проведение полного анализа всех действительных корней для произвольных триномиальных полиномов с действительными коэффициентами: явное описание локализации и кратностей таких корней.

Замечания по диссертации. В связи с разработанным в диссертации новым методом типа метода Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена приближенного вычисления всех корней произвольного полинома возникает вопрос о его вычислительной сложности. На наш взгляд он в работе исследован недостаточно. Поскольку метод основан на вычислении последовательных определителей Адамара возрастающих порядков и коэффициентов разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $P'(z)/P(z)$, то для многочленов высоких степеней это может приводить к накоплению вычислительной погрешности. Полезно было бы провести сравнение реальной трудоемкости разработанного метода с современными численными методами в этом направлении. В пункте 2.4 автор отмечает только, что разработанный им метод можно оптимизировать переходом к вычислению корней «порциями». Разумеется, данное замечание не умаляет высокой научной ценности полученных в диссертации результатов.

В целом, работа написана очень аккуратно, формулировки результатов выверены, последовательность изложения и структура диссертации логичны. Видно, что автор тщательно поработал над текстом.

Нами обнаружены следующие опечатки в диссертации.

В формулировке теоремы 3.1 (с. 56) в первом равенстве должно быть

$f(z) = \ldots$ (а не $f(x) =$),

во втором равенстве должно быть

$g(z) = \ldots$ (а не $g(x) =$).

Эти же опечатки допущены в автореферате в формулировке теоремы 3.1 (с. 10 автореферата).

Все отмеченные недостатки не влияют на итоговую высокую оценку работы. Считаем, что полученные автором результаты и разработанные им методы достаточны для присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени кандидата физико-математических наук. Соискателем проделана большая, трудоемкая и сложная работа по развитию аналитических методов приближенного и явного вычисления корней полиномов, реализации собственных оригинальных идей в рамках этой тематики, строгому обоснованию эффективности предлагаемых конструкций, сравнительному анализу своих результатов и достижений других авторов. Выполненная работа убедительно демонстрирует хорошее владение автором общими и специальными методами вещественного и комплексного анализа, способность находить новые и остроумные решения сложных классических задач. Не вызывает сомнения, что научная квалификация соискателя соответствует ученой степени кандидата физико-математических наук.

Конкретные рекомендации по использованию результатов диссертации. Результаты диссертации носят как теоретический, так и прикладной характер. Они могут применяться при компьютерном вычислении корней многочленов, в теории рациональной аппроксимации, а также могут быть использованы при дальнейшем развитии аналитической теории результантов и дискриминантов и в учебном процессе при чтении спецкурсов по современному анализу и его приложениям.

Отметим, что результаты диссертации уже используются при организации учебного процесса в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова» (акты внедрения от: 30.01.2025 (2 акта), 28.11.2025).

Вывод о соответствии диссертации установленным требованиям.

Диссертация соответствует п. 20 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий», утвержденного Указом Президента Республики Беларусь от 02.06.2022 № 190. Она содержит:

- обоснованную постановку научной задачи (разработку новых методов приближенного и явного вычисления корней произвольных полиномов);

- подробный обзор и анализ имеющейся по теме литературы и результатов других авторов;

- конкретные формулировки полученных соискателем новых научных результатов, характеризующие вклад соискателя ученой степени в разработку и теоретическое обоснование аналитических методов приближенного и явного вычисления корней полиномов;

- детальное описание используемых методов;

- выводы по каждой главе;

- заключение, содержащее перечень основных результатов соискателя;

- рекомендации по использованию полученных научных результатов и Приложение с актами о внедрении полученных результатов в учебный процесс;

- список использованных источников;

- список публикаций автора, отражающих основные научные результаты диссертации.

Диссертация соответствует п. 21 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий», утвержденного Указом Президента Республики Беларусь от 02.06.2022 № 190. Она содержит новые научные теоретические результаты по одному из актуальных направлений научных исследований современной математики – аналитическим методам приближенного и явного вычисления корней полиномов.

Результаты автора опубликованы в 14 научных работах, из которых 6 удовлетворяют п. 19 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий», утвержденного Указом Президента Республики Беларусь от 02.06.2022 № 190. Отметим, что результаты опубликованы в том числе и в престижном международном математическом журнале «Математические заметки».

Результаты автора апробированы как на международных конференциях, так и на специальных математических семинарах.

Отзыв на диссертацию Чернявского М.М., согласно приказу ректора учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» от 15.09.2026 №983, рассмотрен на специально организованном научном семинаре 17 сентября 2026 года, протокол № 2.

Чернявский М.М. выступил на этом семинаре с докладом «Аналитические методы приближенного и явного вычисления корней полиномов», в котором представил основные результаты своей диссертации и используемые методы.

На семинаре состоялась дискуссия, соискатель ответил на все вопросы.

В работе семинара и в голосовании по приему отзыва о диссертации принимали участие доктор физико-математических наук А.Р. Миротин и 9 кандидатов физико-математических наук (М.С. Белокурский,

В.В. Мироненко, Н.В. Рябченко, Г.Н. Казимиров, А.А. Атвиновский, В.И. Мурашко, В.В. Аниськов, Д.С. Кузьменков, Е.А. Ружицкая).

Результаты голосования «за» – 10, «против» – нет, «воздержались» – нет.

Председатель научного семинара:
доктор физ.-мат. наук, профессор А.Р. Миротин

Секретарь научного семинара:
кандидат физ.-мат. наук, доцент А.А. Атвиновский

Эксперт оппонирующей организации:
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
заведующий кафедрой математического
анализа и дифференциальных уравнений
учреждения образования «Гомельский
государственный университет имени
Франциска Скорины» М.С. Белокурский