Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Объект авторского права
УДК 517.537.3+512.622

ЧЕРНЯВСКИЙ
Михаил Михайлович

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО И ЯВНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Гродно, 2026

Научная работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Научный руководитель: **Трубников Юрий Валентинович,** доктор физико-математических наук, профессор

Лебедев Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры интеллектуальных методов моделирования Белорусского государственного университета

Официальные оппоненты: **Вувуникян Юрий Микиртычевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета

Оппонирующая организация: **Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»**

Защита состоится 02.10.2026 в 12.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.14.01 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко 22, ауд. 225, email: Evgenidze_it@grsu.by; тел.: (+375 152) 73 19 26.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

Автореферат разослан 15.07.2026.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций  Э.В. Мусафиров

ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальными исследованиями в области алгебраических полиномов различных степеней ученые-математики непрерывно занимаются на протяжении многих веков. Основной причиной этого является широкое применение полиномов практически во всех естественных науках и во многих разделах фундаментальной и прикладной математики. Если попытаться кратко рассмотреть основные труды по теории алгебраических уравнений за последние 200 лет и дать им оценку, то получится многотомное историческое издание. Значительная часть важных результатов теории и приложений полиномов сконцентрирована в некоторых крупных монографиях, например, в книгах В. В. Прасолова[1] и Д. М. Макнейми (J. M. McNamee)[2], списки источников в которых составляют сотни наименований.

Целью настоящей диссертационной работы является разработка явных и приближенных методов вычисления и анализа корней многочленов.

Методы приближенного подсчета корней полиномов в том направлении, о котором идет речь в настоящей диссертации, имеют долгую и содержательную историю (обзор приведен в разделе 1.1 диссертации).

В 1728 году Д. Бернулли для полиномов с действительными коэффициентами

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_0, a_n \neq 0 \qquad (1)$$

(т. е. $P(x)$ – полином степени n, для которого 0 не является корнем) описал метод (названный последователями в его честь) нахождения наибольшего по модулю действительного корня с помощью вычисления предела последовательности $\dfrac{t_{m+1}}{t_m}$ отношений соседних по номерам решений разностного уравнения

$$a_0t_m + a_1t_{m-1} + \cdots + a_nt_{m-n} = 0 \quad m = n, n+1, \ldots, \qquad (2)$$

построенного по коэффициентам полинома $P(x)$.

Анализу и развитию метода Бернулли посвятили свои работы Л. Эйлер (1748), Ж. Л. Лагранж (1798) и А. К. Эйткен (1927). Последний обобщил метод Бернулли для подсчета произведений упорядоченных по абсолютной величине действительных корней полинома $P(x)$. Он использовал

1. Прасолов, В. В. *Многочлены* / В. В. Прасолов. – М. : МЦНМО, 2014. – 336 с.

2. McNamee, J. M. *Numerical methods for roots of polynomials, part I*; *part II* / J. M. McNamee. – Amsterdam ; Oxford : Elsevier, 2007; 2013.

при этом пределы отношений определителей, составленных из последовательных по номерам решений разностного уравнения (2). Дальнейшие результаты в этом направлении, вплоть до настоящего времени, представлены в монографии[2] и в обзоре в разделе 1.1 диссертации.

В главе 2 диссертации мы развиваем метод Эйлера – Лагранжа и вычисляем все корни произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами, на базе подсчета пределов отношений определителей (как и в методах Бернулли – Эйткена), построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $P'(z)/P(z)$.

В конце XX – начале XXI веков, после относительно долгого перерыва, началось стремительное развитие анализа точных аналитических методов получения корней алгебраических уравнений. В частности, большое внимание уделяется нахождению явных формул для корней (обзор дан в разделе 1.2 диссертации).

Известным математическим инструментом для обнаружения общих корней пар полиномов и кратных корней полиномов являются результанты и дискриминанты. Для пары полиномов f и g их результант $R(f,g)$ – функция от их коэффициентов. Нули результанта $R(f,g)$ соответствуют наборам коэффициентов f и g таким, что f и g имеют общий корень. При этом вычисление этого общего корня является отдельной проблемой.

Основополагающие результаты по вычислению единственного общего простого корня двух полиномов, а также единственного корня полинома кратности 2 в терминах частных производных первого порядка от результантов и дискриминантов, представлены в монографии И. М. Гельфанда, М. М. Капранова и А. В. Зелевинского[3]. Существенное развитие идей этой книги в направлении поиска формул для кратных корней многочленов представлено в статье И. А. Антиповой, Е. Н. Михалкина и А. К. Циха[4]. Ключевой в этой работе является теорема, где получено выражение единственного корня кратности $s \geq 3$ через частные производные первого порядка от результанта многочлена и его производной порядка $s-1$.

В третьей главе настоящей диссертации построено тейлоровское разложение для результантов пар полиномов, обладающих общими корнями.

3. Gelfand, I. M. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants* / I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. – Boston : Birkhäuser, 1994. – 528 p.

4. Антипова, И. А. *Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений* / И. А. Антипова, Е. Н. Михалкин, А. К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.

На этой базе получены серии новых явных формул для общих кратных корней пар полиномов и серии новых формул для кратных корней многочленов.

Отдельным объектом исследований в данной диссертации являются триномиальные (трехчленные) алгебраические уравнения, т. е. уравнения вида

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0)\,.$$

Такие уравнения являются популярным объектом исследований. Только с начала XXI века опубликованы десятки статей, посвященных разным аспектам анализа триномиальных уравнений (обзор дан в разделе 1.3 диссертации).

В настоящей диссертации в главе 4 проведен полный анализ всех действительных корней произвольных триномиальных уравнений с действительными коэффициентами: явно описана локализация и кратности таких корней.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема диссертации соответствует приоритетному направлению научной, научно-технической и инновационной деятельности Республики Беларусь на 2021–2025 годы № 1 «Цифровые информационно-коммуникационные и междисциплинарные технологии, основанные на них производства» (математика и моделирование сложных функциональных систем (технологических, биологических, социальных)) (Указ Президента Республики Беларусь от 07.05.2020 № 156), а также приоритетному направлению научной, научно-технической и инновационной деятельности Республики Беларусь на 2026–2030 годы № 1 «Цифровые технологии и искусственный интеллект» (математические теории и методы, высокопроизводительные вычислительные системы, цифровые модели и двойники) (Указ Президента Республики Беларусь от 01.04.2025 № 135).

Диссертационная работа выполнена на кафедре инженерной физики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова» в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», № ГР 20210494, 2021–2025 гг.) в соответствии с заданием «Разви-

тие аналитических и аппроксимационных методов для анализа и решения задачи системы гравитирующих тел».

Автором диссертации осуществлялось руководство проектами Грантов БРФФИ «Наука – М»: в 2021–2023 гг. «Разработка новых методов нахождения корней алгебраических уравнений в символьном виде» (№ ГР 20213304); в 2023–2025 гг. «Развитие теории конструирования экстремальных полиномов в комплексных областях и символьного решения алгебраических уравнений» (№ ГР 20231184).

В 2025–2027 гг. диссертант руководит проектом БРФФИ «Наука – М» «Развитие методов символьного нахождения корней алгебраических уравнений и построения экстремальных полиномов на комплексной плоскости» (№ ГР 20251037).

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Целью диссертационной работы является разработка явных и приближенных методов вычисления и анализа корней многочленов.

Основные задачи диссертации состоят в следующем:

1. Разработать метод типа метода Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления всех корней произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами на базе подсчета пределов отношений определителей, построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $P'(z)/P(z)$.

2. Получить явные формулы для общих корней пар полиномов и кратных корней полиномов на базе дифференцирования результантов.

3. Для триномиальных уравнений с действительными коэффициентами провести анализ всех действительных корней: описать их локализацию и кратности.

Объект исследования – произвольные полиномы с комплексными коэффициентами и триномиальные полиномы с действительными коэффициентами.

Предмет исследования – корни полиномов, методы приближенного и явного вычисления корней, анализ локализации и кратностей корней.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключаются в следующем:

– разработан новый метод типа метода Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления всех корней произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами на базе подсчета пределов отношений опре-

делителей, построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $P'(z)/P(z)$;

– для результанта $R(f,g)(a,b)$ пары полиномов f и g, обладающих общими корнями, построено тейлоровское разложение по переменным a (коэффициентам f) и по переменным b (коэффициентам g); на этой базе получены серии новых явных формул для общих кратных корней пар полиномов и серии новых формул для кратных корней многочленов;

– проведен полный анализ всех действительных корней произвольных триномиальных уравнений с действительными коэффициентами: явно описана локализация и кратности таких корней.

Положения, выносимые на защиту:

1. Новый метод типа метода Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления всех корней произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами на базе подсчета пределов отношений определителей, построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $P'(z)/P(z)$.

2. Тейлоровское разложение для результантов пар полиномов обладающих общими корнями.

3. Серии новых явных формул для общих кратных корней пар полиномов и серии новых формул для кратных корней полиномов.

4. Полный анализ всех действительных корней произвольных триномиальных уравнений с действительными коэффициентами: явное описание локализации и кратностей таких корней.

Личный вклад соискателя ученой степени в результаты диссертации с отграничением их от соавторов совместных исследований и публикаций

Основные результаты диссертации получены автором лично. Статьи [1–А—3–А; 6–А] опубликованы в соавторстве с научными руководителями – доктором физико-математических наук, профессором Ю. В. Трубниковым (умер в апреле 2025 г.) и доктором физико-математических наук, профессором А. В. Лебедевым.

В перечисленных работах научным руководителям принадлежат постановки задач и общие рекомендации относительно методов их решения, а автору диссертации – реализация этих рекомендаций и доказательства соответствующих результатов.

Без соавторов опубликовано 2 статьи [4–А; 5–А] в научных изданиях в соответствии с пунктом 19 Положения о присуждении ученых степеней

и присвоении ученых званий в Республике Беларусь.

Магистрант Д. А. Китаров, с которым имеются общие акты внедрения, занимался технической реализацией разработанных автором диссертации алгоритмов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертационной работы докладывались на ряде научных семинаров и конференций, в том числе: на семинаре «Действительный, комплексный и функциональный анализ» в БГУ (руководители – профессоры А. Б. Антоневич, В. И. Бахтин, В. Г. Кротов, А. В. Лебедев; 10 апреля 2023 г., 6 мая 2024 г.); Международном онлайн семинаре «International biweekly Seminar on Analysis, Differential Equations and Mathematical Physics» (руководитель – профессор А. Н. Карапетянц, 22 февраля 2024 г.); научном семинаре факультета математики и информатики ГрГУ им. Янки Купалы (руководители – профессор И. П. Мартынов, профессор Е. А. Ровба, 8 мая 2024 г. и 18 апреля 2025 г.); I и II Республиканском форуме молодых ученых учреждений высшего образования (Витебск, 25–27 мая 2022 г., Могилев, 17–19 мая 2023 г.); 75 и 76 региональных научно-практических конференциях «Наука – образованию, производству, экономике» (Витебск, 3 марта 2023 г.; 1 марта 2024 г.); X Международной научной конференции «Математическое и компьютерное моделирование» (Омск, 10 февраля 2023 г.); Международной конференции «XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси» (Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 г.); Международной математической конференции «Восьмые Богдановские чтения. Дифференциальные уравнения» (Минск, 2–5 декабря 2025 г.).

Результаты диссертационной работы внедрены в учебный процесс факультета математики и информационных технологий учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова» (акты внедрения от: 30.01.2025 (2 акта), 28.11.2025).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах (общим объемом 4,78 авт. л.), в том числе 6 статей в научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (3,83 авт. л.), и 8 публикаций в сборниках материалов научных конференций (0,95 авт. л.). Опубликованные работы полностью отражают содержание диссертации.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, списка использованных источников, содержащего 237 наименований, включая 14 публикаций соискателя ученой степени, и приложения. Полный объем диссертации составляет 125 страниц: 97 страниц – текст диссертации; 22 страницы – список использованных источников; 6 страниц – приложение.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Первая глава содержит аналитический обзор результатов, посвященных трем направлениям анализа корней полиномов:

– вычислению корней полиномов методами, восходящими к методу Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена (раздел 1.1);

– явным формулам для корней полиномов, получаемым на базе дифференцирования результантов и дискриминантов (раздел 1.2);

– анализу корней триномиальных полиномов (раздел 1.3).

В главе 2 разработан новый метод типа метода Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления всех корней произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами, на базе подсчета пределов отношений определителей, построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$.

В разделе 2.2 описан метод вычисления всех корней произвольного полинома. Процедура вычисления идет по возрастанию абсолютных величин корней.

В разработанном методе принципиальную техническую роль играют определители Адамара.

Пусть $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n, \quad a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$; $a_0, a_n \neq 0$ – произвольный полином степени n, для которого 0 не является корнем, т. е.

$$P(z) = a_0 (z - z_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (z - z_p)^{m_p},$$

где $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$ – сумма кратностей корней z_j и $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$ и $z_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, p$. Вместе с полиномом $P(z)$ рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{z - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{3}$$

Здесь правая часть – разложение функции $P'(z)/P(z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля.

По коэффициентам c_k ряда (3) строятся определители Адамара. А именно, для каждой пары натуральных чисел $(k,r),\ k \geq 0, r > 0$ определителем Адамара $H_{k,r}$ называется определитель

$$H_{k,r} := \begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & \dots & c_{k+r-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{k+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k+r-1} & c_{k+r} & \dots & c_{k+2(r-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.1 [1–A; 2–A] описывает связь между определителями Адамара и Вандермонда. Здесь, в частности, установлено, что

$$H_{k,r} = 0 \ \text{ для } \ r > p; \qquad \text{и} \quad \frac{H_{k,p}}{H_{k+1,p}} = z_1 \cdot \ldots \cdot z_p \,.$$

А для $r < p$ справедлива следующая

Теорема 2.3 [1–A; 2–A]. *Пусть* $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots \leq |z_r| < |z_{r+1}| \leq \leq |z_{r+2}| \leq \ldots \leq |z_p|$. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}} = z_1 \cdot \ldots \cdot z_r \,.$$

При этом

$$\left| \frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}} - z_1 \cdot \ldots \cdot z_r \right| < Cq^k,$$

где

$$0 < q = \frac{|z_r|}{|z_{r+1}|} < 1.$$

Условие $|z_r| < |z_{r+1}|$ в теореме 2.3 является не только достаточным, но и необходимым условием существования обсуждаемых пределов. А именно, справедлива следующая

Теорема 2.4 [1–A; 2–A]. *Пусть* $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots \leq |z_r| = |z_{r+1}| \leq \leq |z_{r+2}| \leq \ldots \leq |z_p|$. *Тогда не существует предела* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}}$.

Вышеприведенные результаты позволяют вычислять корни многочлена $P(z)$, начиная с наименьшего по модулю. Аналогичная процедура вычисления корней полинома, начиная с наибольшего по модулю осуществляется разделе 2.3 на базе разложения функции $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности (т. е. для $|z| > \max\limits_{1\leq j\leq p} |z_j|$)

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{z - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^{k+1}}, \tag{4}$$

с помощью соответствующих определителей Адамара.

В разделе 2.5 представлен конкретный пример вычисления всех корней полинома на базе разработанных методов.

В третьей главе построено тейлоровское разложение для результантов пар полиномов, обладающих общими корнями. На этой базе получены серии новых явных формул для общих кратных корней пар полиномов и серии новых формул для кратных корней многочленов.

Напомним определение результанта.

Пусть $f(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \neq 0)$ и $g(z) := \sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}$ $(b_0 \neq 0)$ – два многочлена.

Их *результантом* называется определитель

$$R(f,g) := \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix}. \tag{5}$$

В данном определителе m строк с коэффициентами полинома $f(z)$ и n строк с коэффициентами полинома $g(z)$. В ячейках определителя, где оставлены пустые поля, подразумеваются нули.

Результант – это функция от коэффициентов многочленов f и g, т. е. $R(f,g) = R(f,g)(a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_m)$.

В монографии И. М. Гельфанда, М. М. Капранова и А. В. Зелевинского[3] доказано следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Если полиномы*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$$

имеют ровно один простой общий корень w, то тогда w можно найти

явно из соотношений:

$$\left(w^n : w^{n-1} : w^{n-2} : \cdots : w : 1\right) = \left(\frac{\partial R\,(f,g)}{\partial a_0} : \frac{\partial R\,(f,g)}{\partial a_1} : \cdots : \frac{\partial R\,(f,g)}{\partial a_n}\right), \quad (6)$$

$$\left(w^m : w^{m-1} : w^{m-2} : \cdots : w : 1\right) = \left(\frac{\partial R\,(f,g)}{\partial b_0} : \frac{\partial R\,(f,g)}{\partial b_1} : \ldots : \frac{\partial R\,(f,g)}{\partial b_m}\right), \quad (7)$$

где $R\,(f,g)$ *– результант полиномов* $f\,(x)$ *и* $g\,(x)$.

В монографии[3] формулы (6), (7) получаются из интерпретации дискриминанта в теории двойственности алгебраических многообразий. Акцентируя внимание на принципиальной важности этих формул, авторы[3] подчеркивают, что *«The general proof given there (reduction via the Cayley trick, to the biduality theorem for projective dual varieties), is probably the most transparent»* [с. 400].

Для выполнения соотношений (6) и (7) принципиально важно, чтобы общий корень был только один, и чтобы он не являлся кратным для какого-то из полиномов. Здесь можно привести пример $f\,(x) = (x-1)^3, \quad g\,(x) = (x-1)^2$, где все частные производные первого порядка $\dfrac{\partial R\,(f,g)}{\partial a_i}$, $i = 0,1,2,3$; $\dfrac{\partial R\,(f,g)}{\partial b_j}$, $j = 0,1,2$; равны нулю.

Следующий результат диссертации описывает эффекты, возникающие в таких ситуациях.

Теорема 3.1 [3–A; 6–A]. *Пусть*

$$f\,(x) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \quad (a_0 \neq 0,\ a_n \neq 0)\,,$$

$$g\,(x) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m, \quad (b_0 \neq 0, \quad b_m \neq 0)\,.$$

Если многочлены f *и* g *имеют ровно один общий корень* w *кратности* s *для* f *и кратности* p *для* g, *то для результанта* $R := R\,(f,g)$ *имеют место следующие равенства*:

1) *для* $1 \leq r < s$

$$\frac{\partial^r R}{\partial b_{j_r} \ldots \partial b_{j_1}} = 0 \qquad (j_k = 0,1,\ldots,m)\,; \quad (8)$$

2) *для* $1 \leq r < p$

$$\frac{\partial^r R}{\partial a_{i_r} \ldots \partial a_{i_1}} = 0, \qquad (i_k = 0,1,\ldots,n)\,; \quad (9)$$

3) $$\frac{\partial^s R}{\partial b_{j_s} \ldots \partial b_{j_1}} : \frac{\partial^s R}{\partial b_{k_s} \ldots \partial b_{k_1}} =$$

$$= w^{(k_s+\ldots+k_1)-(j_s+\ldots+j_1)} \qquad (j_r, k_r = 0, 1, \ldots, m)\,; \tag{10}$$

4)
$$\frac{\partial^p R}{\partial a_{i_p} \ldots \partial a_{i_1}} : \frac{\partial^p R}{\partial a_{l_p} \ldots \partial a_{l_1}} =$$

$$= w^{(l_p+\ldots+l_1)-(i_p+\ldots+i_1)} \qquad (i_r, l_r = 0, 1, \ldots, n)\,. \tag{11}$$

При $p = s = 1$ имеют место соотношения (6) *и* (7).

Теорема 3.1 получена с помощью тейлоровского разложения результанта, которое при наличии общих корней у пар полиномов принимает довольно специальный вид.

Напомним, что для функции $F : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ ее производная порядка s $F^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ – это s–линейная функция, задаваемая семейством частных производных

$$F^{(s)} \leftrightarrow \left[\frac{\partial^s F}{\partial z_{i_s} \ldots \partial z_{i_1}}\right], \quad i_r = 1, \ldots, p\,.$$

Если $F(a, b)$, $a = (a_0, \ldots, a_n)$, $b = (b_0, \ldots, b_m)$ – функция от $(n+1)+$ $+(m+1)$ переменных, то через $F_a^{(s)}$ мы обозначаем ее частную производную порядка s по переменным a и, соответственно, через $F_b^{(s)}$ обозначаем ее частную производную порядка s по переменным b. Положим также, как обычно, $F^{(0)} = F_a^{(0)} = F_b^{(0)} = F$.

Теорема 3.3 [3–A; 6–A]. *Пусть*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$

$$g(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m \quad (b_0 \neq 0);$$

z_i, $i = \overline{1, n}$ *– корни* f, y_j, $j = \overline{1, m}$ *– корни* g.

Если f *и* g *имеют общий корень* w *и, при этом,* $w = z_1 = z_2 = \ldots = z_s$ *– корень кратности* s $(1 \leq s < n)$ *для* f, *и* $w = y_1 = y_2 = \ldots = y_p$ *– корень кратности* p $(1 \leq p < m)$ *для* g, *то для результанта* $R := R(f, g)(a, b)$ $a = (a_0, \ldots, a_n)$, $b = (b_0, \ldots, b_m)$ *имеют место следующие равенства:*

1) *для* $0 \leq r < s$

$$R_b^{(r)} = 0; \tag{12}$$

для $0 \leq r < p$

$$R_a^{(r)} = 0. \tag{13}$$

2) $$\frac{\partial^s R}{\partial b_{j_s} \ldots \partial b_{j_1}} = a_0^m\, s!\, w^{sm-(j_s+\ldots+j_1)} \cdot \prod_{i=s+1}^{n} g(z_i) \qquad (j_k = 0, 1, \ldots, m)\,, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^p R}{\partial a_{i_p}\dots\partial a_{i_1}} = (-1)^{mn}\, b_0^n\, p!\, w^{pn-(i_p+\dots+i_1)} \cdot \prod_{j=p+1}^{m} f(y_j) \quad (i_k = 0,1,\dots,n)\,. \quad (15)$$

Если $s = n$, *т. е.* $f(z) = a_0(z-w)^n$, *то вместо* (14) *имеем*

$$\frac{\partial^n R}{\partial b_{j_n}\dots\partial b_{j_1}} = a_0^m\, n!\, w^{nm-(j_n+\dots+j_1)} \qquad (j_k = 0,1,\dots,m)\,, \qquad (16)$$

если $p = m$, *т. е.* $g(z) = b_0(z-w)^m$, *то вместо* (15) *имеем*

$$\frac{\partial^m R}{\partial a_{i_m}\dots\partial a_{i_1}} = b_0^n\, m!\, w^{nm-(i_m+\dots+i_1)} \qquad (i_k = 0,1,\dots,n)\,. \qquad (17)$$

Иными словами, при наличии у полиномов f и g общего корня w кратности s для f и кратности p для g разложение в ряд Тейлора для результанта $R(f,g)(a,b)$ по переменным b (коэффициентам g) начинается со слагаемого порядка s, а разложение в ряд Тейлора для $R(f,g)(a,b)$ по переменным a (коэффициентам f) начинается со слагаемого порядка p и соответствующие слагаемые ряда Тейлора описываются явно.

В разделе 3.1.5 приведены примеры серий новых формул для общих кратных корней пар полиномов, получаемых на базе результатов разделов 3.1.2, 3.1.3.

Рациональные выражения для кратных корней полиномов. Поскольку кратный корень полинома является корнем его производной, то соотношения (10) и (11) можно использовать для построения формул для вычисления этого кратного корня, получая серии формул, связывающих корни и коэффициенты полинома.

В качестве приложений полученных результатов мы в разделе 3.2 получаем серии новых явных формул для кратных корней полиномов.

Алгоритмы получения точных рациональных выражений для кратных корней полиномов (известные результаты). В монографии И. М. Гельфанда, М. М. Капранова и А. В. Зелевинского[3] в главе 12 в качестве приложения предложения 3.1 получены формулы для корня w полинома f в ситуации, когда w – единственный корень кратности 2. Развитию идей из этой книги по рациональному выражению кратных корней полинома посвящена статья И. А. Антиповой, Е. Н. Михалкина и А. К. Циха[4]. Ключевой в ней является следующая

Теорема 3.5[4]. *Пусть* w *– ненулевой корень кратности* $s \geq 3$ *для полинома*

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

и остальные корни простые.

Корень w *выражается через частные производные* $\dfrac{\partial R}{\partial a_i}$, *где* $R = R\left(f, f^{(s-1)}\right)$ *– результант многочлена и его производной порядка* $s-1$ *по формулам*

$$w = \frac{\partial R}{\partial a_{n-(s-2)}} : \frac{\partial R}{\partial a_{n-(s-3)}} = \frac{\partial R}{\partial a_{n-(s-3)}} : \frac{\partial R}{\partial a_{n-(s-4)}} = \ldots = \frac{\partial R}{\partial a_{n-1}} : \frac{\partial R}{\partial a_n}.$$

В разделе 3.2 диссертации доказан ряд идейно отличных от теоремы 3.5 результатов, связывающих высшие производные от результантов и кратные корни и получены серии новых явных формул для кратных корней полиномов. Кроме того, эти результаты применяются для нового прозрачного доказательства уточнения теоремы 3.5.

Следующее утверждение является некоторой альтернативой теореме 3.5.

Теорема 3.8 [5–А; 6–А]. *Полином* $f(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \neq 0,$ $a_n \neq 0)$ *представляется в виде*

$$f(z) = a_0 (z-w)^s (z-z_{s+1})(z-z_{s+2}) \ldots (z-z_{n-1})(z-z_n),$$

где $2 \leq s < n$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$ *и* $w \neq z_i$; *тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие соотношения*:

1) $R\left(f, f^{(s-1)}\right) = 0$,
2) $R\left(f, f^{(s)}\right) \neq 0$,
3) $\dfrac{\partial^s R(f, f')}{\partial b_{n-1}^s} \neq 0$, *где* b_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ *— коэффициенты полинома* $g(z) = f'(z)$.

При этом для корня w *выполняются соотношения*

$$\frac{\partial^s R(f, f')}{\partial b_{j_s} \ldots \partial b_{j_1}} : \frac{\partial^s R(f, f')}{\partial b_{k_s} \ldots \partial b_{k_1}} = w^{(k_s+\ldots+k_1)-(j_s+\ldots+j_1)}, \quad (j_r, k_r = 0, 1, \ldots, n-1).$$

В разделе 3.2.4 представлены примеры, иллюстрирующие получение конкретных рациональных выражений для вычисления кратных корней наибольшей кратности на базе полученных теорем. Они демонстрируют качественную разницу в формулах, выводимых на основе теоремы 3.5 и теоремы 3.8.

В заключительной главе 4 объектом исследования являются триномиальные (трехчленные) алгебраические уравнения, т. е. уравнения вида

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0).$$

Здесь разработан простой и единообразный метод, позволяющий устанавливать число и локализацию действительных решений трехчленных алгебраических уравнений произвольных степеней с действительными коэффициентами. Метод основан на том факте, что при помощи определенных подстановок трехчленное уравнение приводится к уравнению с одним параметром, представимым в виде явной функции от коэффициентов первоначального уравнения, и свойства решений исходного уравнения зависят только от значений этого параметра.

В процессе анализа триномиальных уравнений мы используем их следующую классификацию: в зависимости от четности степеней n и m трехчленные алгебраические уравнения подразделяются на 4 типа: нечетно-нечетные, четно-нечетные, нечетно-четные и четно-четные.

Анализ проведен для всех типов уравнений. Приведем один из полученных результатов.

Триномиальные нечетно-нечетные уравнения. Имеет место следующая

Теорема 4.1 [4–А]. *Пусть в уравнении*

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0) \tag{18}$$

n, m – нечетные числа.

Уравнение (18) *имеет единственный вещественный корень тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} < \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}. \tag{19}$$

При выполнении неравенства

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} > \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}. \tag{20}$$

уравнение (18) *имеет три разных вещественных корня. При этом, если $q < 0,\ p < 0$, то два из этих корней отрицательны, а один – положителен; если $q > 0,\ p < 0$, то два корня больше нуля и один меньше нуля.*

Если имеет место равенство

$$\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}, \tag{21}$$

то у уравнения (18) *один корень x_* кратности 2, удовлетворяющий равенствам*

$$x_*{}^n = \frac{qm}{n-m}, \qquad x_*{}^{n-m} = -\frac{pm}{n}; \tag{22}$$

(*т. е.* (*так как* n – *нечетное число*) $x_* = \left(\dfrac{qm}{n-m}\right)^{1/n}$).

Во всех случаях корни задаются решениями определяющего уравнения

$$\frac{t^n}{t^m+1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}, \tag{23}$$

и подстановкой

$$x = t\left(\frac{q}{p}\right)^{1/m} \quad (t \neq 0).$$

Функцию $f(t) := \dfrac{t^n}{t^m+1}$ принято называть *определяющей функцией*, а уравнение (23) – *определяющим уравнением*. Например, на рисунке 1 изображен график определяющей функции $f(t) = \dfrac{t^3}{t+1}$.

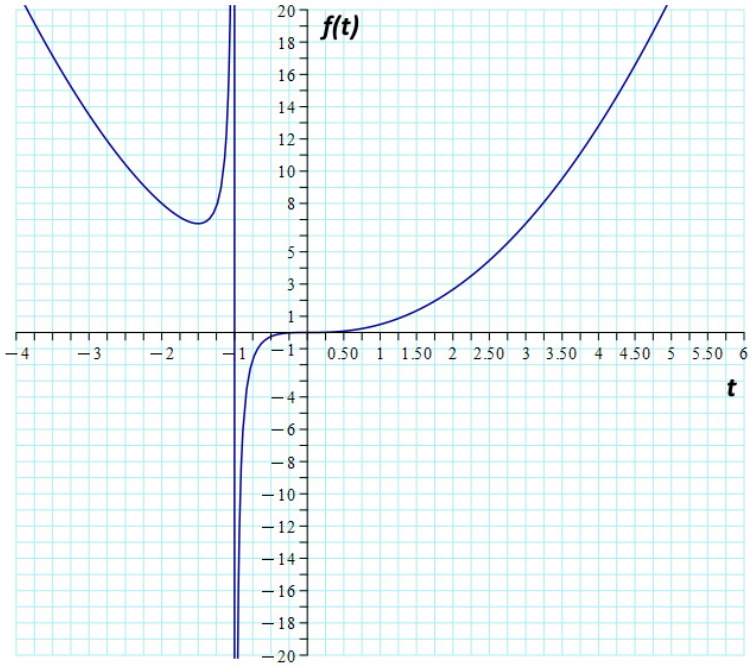


Рисунок 1 – График функции $\mathbf{f(t) = \dfrac{t^3}{t+1}}$

Схематично графики всех определяющих функций $f(t)$ при произвольных нечетных n и m будут выглядеть похожими друг на друга. Анализ определяющей функции из левой части уравнения (23) приводит к доказательству теоремы 4.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Разработан метод типа метода Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления всех корней произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами на базе подсчета пределов отношений определителей, построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$.

Получена оценка скорости сходимости разработанного метода.

На примерах продемонстрировано, что полученный метод одинаково эффективен для поиска как простых корней, так и кратных корней любой степени кратности [1–А; 2–А; 7–А; 13–А; 14–А].

2. Для результанта $R(f,g)(a,b)$ пары полиномов f и g, обладающих общими корнями, построено тейлоровское разложение по переменным a (коэффициентам f) и по переменным b (коэффициентам g) [3–А; 6–А].

3. На базе дифференцирования результантов получены серии новых явных формул для общих кратных корней пар полиномов. В качестве их приложений получены серии новых формул для кратных корней многочлена [3–А; 5–А; 6–А; 8–А—12–А].

4. Разработан простой и единообразный метод, позволяющий устанавливать число и локализацию действительных решений трехчленных (триномиальных) алгебраических уравнений произвольных степеней с действительными коэффициентами. Метод основан на том факте, что при помощи определенных подстановок трехчленное уравнение приводится к определяющему уравнению с одним параметром, представимым в виде явной функции от коэффициентов первоначального уравнения, и свойства решений исходного уравнения зависят только от значений этого параметра.

Классификация триномиальных уравнений строится по поведению определяющей функции и насчитывает четыре типа уравнений в зависимости от входящих степеней переменной: нечетно-нечетные уравнения, четно-нечетные, нечетно-четные и четно-четные. На этой основе проведен полный анализ таких уравнений в данном направлении [4–А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации носят теоретический и прикладной характер. Они могут применяться при компьютерном вычислении корней многочленов (глава 2, глава 4), теории рациональных аппроксимаций, а также могут быть использованы при дальнейшем развитии аналитической теории результантов и дискриминантов, и в учебном процессе при чтении спецкурсов по современному анализу.

Результаты диссертации используются при организации учебного процесса в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова» (акты внедрения от: 30.01.2025 (2 акта), 28.11.2025).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1–А. Лебедев, А. В. О методе Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления корней полиномов / А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 5. – С. 359–365.

2–А. Лебедев, А. В. Об определителях Адамара и Вандермонда и методе Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления корней полиномов / А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические заметки. – 2024. – Т. 116, № 1. – С. 91–108.

3–А. Лебедев, А. В. Дифференцирование результантов и общие кратные корни полиномов / А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Доклады Национальной академии наук Беларуси.– 2024. – Т. 68, № 4. – С. 282–287.

4–А. Чернявский, М. М. Анализ корней триномиальных полиномов / М. М. Чернявский // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2024. – Т. 60, № 4. – С. 280–294.

5–А. Чернявский, М. М. Рациональные выражения для кратных корней полиномов / М. М. Чернявский // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 2. – С. 95–100.

6–А. Лебедев, А. В. Производные результантов и общие кратные корни пар полиномов / А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические заметки. – 2026. – Т. 119, № 3. – С. 396–412.

Материалы конференций

7–А. Чернявский, М. М. Исследование модифицированного метода Бернулли – Эйткена – Никипорца / М. М. Чернявский // I Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования : сб. материалов форума, Витебск, 25–27 мая 2022 г. / Витеб. гос. ун-т [и др.] ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2022. – С. 81–83.

8–А. Трубников, Ю. В. Свойства структур частных производных от результанта многочлена со своей производной при наличии кратных корней / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математическое и компьютерное моделирование : сб. материалов X Междунар. науч. конф.,

Омск, 10 февр. 2023 г. / М-во науки и высшего образования Рос. Федерации [и др.] ; редкол.: отв. за вып. И. П. Бесценный. – Омск, 2023. – С. 42–44.

9–А. Трубников, Ю. В. О структурах частных производных высоких порядков от результанта многочлена с первой производной при наличии кратных корней / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 75-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 3 марта 2023 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2023. – С. 61–64. – URL: https://rep.vsu.by/bitstream/123456789/36818/1/61-64.pdf (дата обращения: 10.04.2026).

10–А. Чернявский, М. М. Актуальные алгоритмы построения точных формул для кратных корней полиномов / М. М. Чернявский // Второй Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования Республики Беларусь : сб. науч. тр., Могилев, 17–19 мая 2023 г. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т ; редкол.: В. М. Пашкевич (общ. ред.) [и др.]. – Могилев, 2023. – С. 202–203.

11–А. Трубников, Ю. В. Сравнение и развитие современных подходов к получению рациональных формул для кратных корней полиномов / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 76-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 1 марта 2024 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2024. – С. 50–53.

12–А. Чернявский, М. М. Производные результантов и общие кратные корни пар полиномов / М. М. Чернявский // XIV Белорусская математическая конференция, посвящ. 65-летию Института математики НАН Беларуси : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г. : в 3 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; сост. Т. С. Бусел. – Минск, 2024. – Ч. 1. – С. 37–39.

13–А. Лебедев, А. В. Об определителях Адамара и Вандермонда и методе Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления корней полиномов / А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // XIV Белорусская математическая конференция, посвящ. 65-летию Института математики НАН Беларуси : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г. : в 3 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; сост.

Т. С. Бусел. – Минск, 2024. – Ч. 1. – С. 66–67.

14–А. Лебедев, А. В. Вычисление корней полиномов: развитие метода Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена / А. В. Лебедев, М. М. Чернявский // Восьмые Богдановские чтения. Дифференциальные уравнения : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 2–5 дек. 2025 г. / Белорус. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси ; сост.: С. Г. Красовский, А. А. Леваков, А. В. Филипцов. – Минск, 2025. – С. 129–131.

РЕЗЮМЕ

Чернявский Михаил Михайлович

Аналитические методы приближенного и явного вычисления корней полиномов

Ключевые слова: корни полинома, ряд Тейлора, ряд Лорана, определители Адамара, дифференцирование результантов, определяющие уравнения

Цель исследования: разработка явных и приближенных методов вычисления и анализа корней многочленов.

Методы исследования: методы действительного и комплексного анализа, в том числе разложения в ряды Тейлора и Лорана, анализ функций с помощью производных, предельные переходы и другие методы математического анализа.

Полученные результаты и их новизна. Разработан новый метод типа метода Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления всех корней произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами на базе подсчета пределов отношений определителей, построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$.

Для результанта $R(f,g)$ пары полиномов f и g, обладающих общими корнями, построено тейлоровское разложение по коэффициентам полинома f и коэффициентам полинома g. На этой базе получены серии новых явных формул для общих кратных корней пар полиномов и серии новых формул для кратных корней многочленов.

Проведен полный анализ всех действительных корней произвольных триномиальных уравнений с действительными коэффициентами: явно описаны локализация и кратности таких корней.

Рекомендации по использованию. Результаты диссертации носят теоретический и прикладной характер. Они могут быть использованы при дальнейшем развитии аналитической теории результантов и дискриминантов, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов по современному анализу.

Области применения. Компьютерное вычисление корней многочленов, теория рациональных аппроксимаций, подготовка специалистов в области фундаментальной и прикладной математики.

РЭЗЮМЭ

Чарняўскі Міхаіл Міхайлавіч

Аналітычныя метады прыбліжанага і яўнага вылічэння каранёў паліномаў

Ключавыя словы: карані палінома, рад Тэйлара, рад Ларана, вызначальнікі Адамара, дыферэнцыраванне рэзультантаў, вызначальныя ўраўненні

Мэта даследавання: распрацоўка яўных і прыбліжаных метадаў вылічэння і аналізу каранёў мнагачленаў.

Метады даследавання: метады рэчаіснага і камплекснага аналізу, у тым ліку раскладанне ў рады Тэйлара і Ларана, аналіз функцый з дапамогай вытворных, лімітавыя пераходы і іншыя метады матэматычнага аналізу.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Распрацаваны новы метад тыпу метаду Бернулі – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вылічэння ўсіх каранёў адвольнага многачлена $P(z)$ з камплекснымі каэфіцыентамі на аснове падліку лімітаў адносін вызначальнікаў, складзеных з каэфіцыентаў раскладанняў у рады Тэйлара і Ларана функцыі $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$.

Для рэзультанта $R(f,g)$ пары паліномаў f і g, якія маюць агульныя карані, пабудавана тэйлараўскае раскладанне па каэфіцыентах многачлена f і каэфіцыентах многачлена g. На гэтай аснове атрыманы серыі новых яўных формул для агульных кратных каранёў пар мнагачленаў і серыі новых формул для кратных каранёў мнагачленаў.

Праведзены поўны аналіз усіх рэчаісных каранёў адвольных трынаміяльных ураўненняў з рэчаіснымі каэфіцыентамі: яўна апісаны лакалізацыя і кратнасці такіх каранёў.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Вынікі дысертацыі носяць тэарэтычны і прыкладны характар. Яны могуць быць выкарыстаны пры далейшым развіцці аналітычнай тэорыі рэзультантаў і дыскрымінантаў, і ў навучальным працэсе пры чытанні спецкурсаў па сучасным аналізе.

Вобласці прымянення. Камп'ютарнае вылічэнне каранёў мнагачленаў, тэорыя рацыянальных апраксімацый, падрыхтоўка спецыялістаў у вобласці фундаментальнай і прыкладной матэматыкі.

SUMMARY

Mikhail Charniauski

Analytical methods for approximate and explicit calculation of roots of polynomials

Keywords: roots of a polynomial, Taylor series, Laurent series, Hadamard determinants, differentiation of resultants, defining equations

The purpose of the study is the development of explicit and approximate methods for the computation and analysis of polynomial roots.

Research methods: methods of real and complex analysis, including Taylor and Laurent series expansions, function analysis using derivatives, limit processes, and other methods of mathematical analysis.

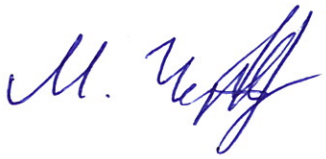
A new method of the Bernoulli–Euler–Lagrange–Aitken type for computing all roots of an arbitrary polynomial $P(z)$ with complex coefficients has been developed. The method is based on calculating the limits of ratios of determinants constructed from the coefficients of Taylor and Laurent series expansions of the function $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$.

For the resultant $R(f,g)$ of a pair of polynomials f and g that have common roots, a Taylor expansion is constructed in terms of the coefficients of the polynomial f and the coefficients of the polynomial g. On this basis, a series of new explicit formulas for common multiple roots of pairs of polynomials and a series of new formulas for multiple roots are obtained polynomials.

A complete analysis of all real roots of arbitrary trinomial equations with real coefficients is carried out: the localization and multiplicities of such roots are explicitly described.

Recommendations for use. The results of the dissertation are theoretical and applied in nature. the further development of the analytical theory of resultants and discriminants, and in the educational process when teaching special courses on modern analysis.

Areas of application. Computer calculation of the roots of polynomials, the theory of rational approximations, training of specialists in fundamental and applied mathematics.



ЛИСТ ИСПРАВЛЕНИЙ

в текст автореферата диссертации

Чернявского Михаила Михайловича «Аналитические методы приближенного и явного вычисления корней полиномов», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Номер страницы, строки	Напечатано	Следует читать
Страница 10, строка 19	$f(x) =$	$f(z) =$
Страница 10, строка 20	$g(x) =$	$g(z) =$

Соискатель М.М. Чернявский

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д 02.14.01 Э.В. Мусафиров