Учреждение образования
«Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы»

Объект авторского права

УДК 517.968.23

НАГОРНАЯ
Татьяна Романовна

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Гродно, 2026

Научная работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Смоленский государственный университет»

Научный руководитель: **Расулов Карим Магомедович,**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Смоленский государственный университет»

Официальные оппоненты: **Шерстюков Владимир Борисович,**
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Мисюк Виктор Романович,
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Оппонирующая организация: Белорусский государственный университет

Защита состоится 04.12.2026 в 12.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.14.01 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209, email: Evgenidze_IT@grsu.by; тел.: (+375 152) 73 19 26.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГрГУ им. Янки Купалы.

Автореферат разослан «29» октября 2026 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Э.В. Мусафиров

ВВЕДЕНИЕ

Теория краевых (граничных) задач в классах аналитических функций комплексного переменного и различных их обобщений представляет собой на сегодняшний день одну из интенсивно развивающихся областей комплексного анализа.

Основы классической теории краевых задач для аналитических функций комплексного переменного были заложены во второй половине прошлого столетия в фундаментальных работах Л. А. Аксентьева, Б. В. Боярского, Н. П. Векуа, Ф. Д. Гахова, И. И. Данилюка, Э. И. Зверовича, Р. С. Исаханова, Д. А. Квеселава, Г. Ф. Манджавидзе, Л. Г. Михайлова, С. Г. Михлина, В. Г. Монахова, Н. И. Мусхелишвили, Л. И. Чибриковой и многих других известных математиков.

Однако для решения многих прикладных задач, возникающих, например, в различных разделах механики сплошной среды, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны, классической теории краевых задач в классах аналитических функций комплексного переменного оказывается недостаточно. В связи с этим вслед за классической теорией краевых задач для аналитических функций в 70-х и 80-х годах прошлого столетия началось интенсивное изучение краевых задач в различных классах функций, являющихся естественными обобщениями аналитических функций комплексного переменного (обобщенных аналитических функций в смысле И. Н. Векуа, полианалитических функций, метааналитических и др.).

За последние три десятилетия в математической литературе выделяются два основных направления исследований в области краевых задач комплексного анализа:

а) обобщение полученных ранее результатов в классах аналитических функций комплексного переменного для более широкого класса областей и контуров, а также изучение этих задач при ослабленных ограничениях на коэффициенты краевых условий;

б) изучение краевых задач в классах различных обобщений аналитических функций комплексного переменного (полианалитических функций, метааналитических функций, квазигармонических функций и др.).

Исследования, проводимые в настоящей диссертации, относятся ко второму из перечисленных выше направлений. А именно, данная работа посвящена решению краевой задачи типа задачи Пуанкаре в классах функций, которые являются регулярными в области T^+ решениями эллиптического дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1-z\bar{z})^2} W = 0, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, n – некоторое неотрицательное целое число, $W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ – неизвестная функция, а T^+ – односвязная область, лежащая в единичном круге $U_1^+ = \{z : |z| < 1\}$ и такая, что точка $z = 0$ принадлежит T^+ (рисунок 1).

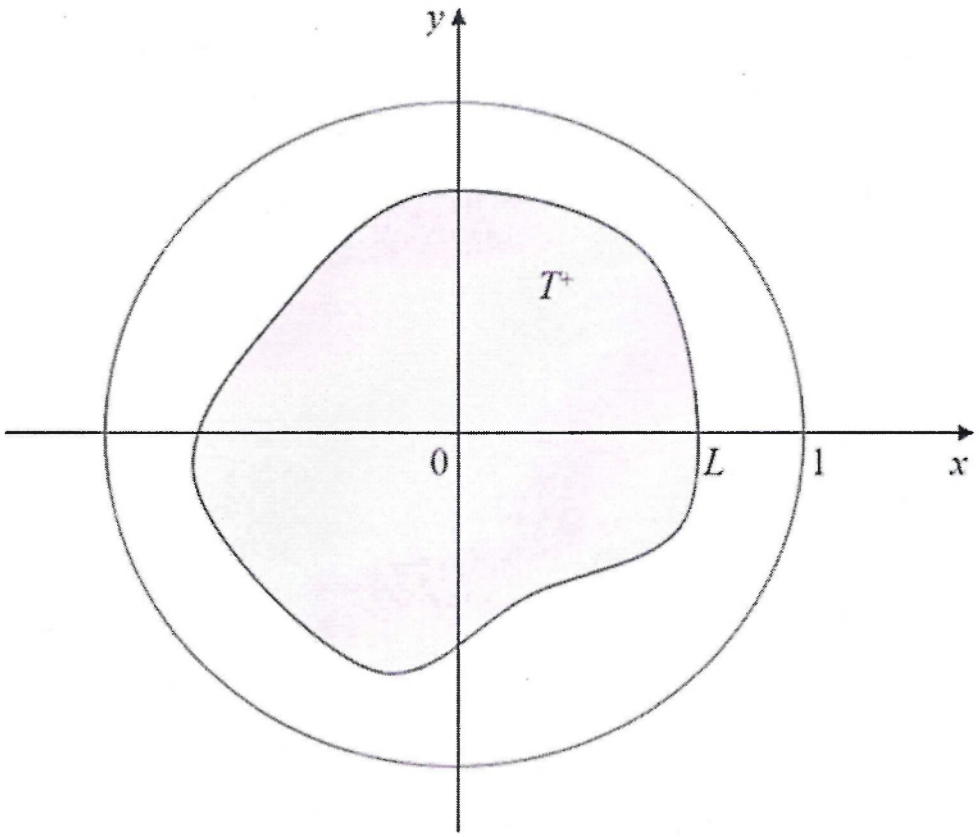


Рисунок 1 – Изображение области T^+.

Поскольку при $n = 0$ решениями уравнения (1) служат *гармонические в области* T^+ *функции*, обычно при $n \geq 1$ решения уравнения называют *обобщенными гармоническими функциями n-го порядка в области* T^+.

Настоящая диссертация посвящена исследованию следующей *краевой задачи типа задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций первого порядка* (кратко – **задачи GP_1**):

требуется найти все обобщенные гармонические функции $W(z)$ *первого порядка в области* T^+, *которые принадлежат классу* $G_1(T^-) \cap H^{(2)}(L)$ *и удовлетворяют на L условию*

$$a(t)\frac{\partial W(t)}{\partial x} + b(t)\frac{\partial W(t)}{\partial y} + c(t)W(t) = q(t), t \in L, \tag{2}$$

где $a(t), b(t), c(t), q(t)$ *– заданные на контуре* L *комплекснозначные функции класса* $H(L)$*; здесь* L *– гладкая замкнутая кривая, которая служит границей области* T^+ (рисунок 1).

Важно отметить, что многие физические задачи, которые связаны, например, с диффузией газа при наличии распада и при цепных реакциях, приводятся к дифференциальным уравнениям вида (1).

Кроме того, оказалось, что по своим качественным функциональным свойствам (теоремы единственности, интегральные представления и др.) класс обобщенных гармонических функций первого порядка достаточно близок классу бианалитических функций в области T^+, имеющим многочисленные применения в плоской теории упругости.

Хорошо известно, что, как правило, решение классических линейных краевых задач в различных классах функций, которые являются обобщениями аналитических функций комплексного переменного (например, полианалитических функций, метааналитических функций, квазигармонических функций и др.), сводятся либо к определенным векторно-матричным краевым задачам (типа Римана или типа Гильберта) в классах аналитических функций комплексного переменного, либо к интегро-дифференциальным скалярным краевым задачам типа задачи Римана или типа задачи Гильберта в классах аналитических функций. Однако в общем случае до сих пор не существует каких-либо эффективных методов решения ни векторно-матричных краевых задач для аналитических функций комплексного переменного, ни интегро-дифференциальных скалярных краевых задач в классах аналитических функций. Основным методом решения как векторно-матричных краевых задач, так и интегро-дифференциальных скалярных краевых задач в классах аналитических функций комплексного переменного в общем случае остается так называемый *метод интегральных уравнений.* Но метод интегральных уравнений не позволяет установить полную картину разрешимости рассматриваемых краевых задач, а также изучать такие важные вопросы, как корректность постановки рассматриваемых задач (т. е. непрерывную зависимость решений от коэффициентов краевых условий и/или от малых изменений носителя краевых условий).

За последние два десятилетия при исследовании различных краевых задач для функций, являющихся обобщениями аналитических функций комплексного переменного (например, метааналитических функций, квазигармонических функций и др.) *в областях с аналитическими границами,* часто используются так называемые *комплексно-аналитические методы,* в основе которых лежат метод сопряжения аналитических функций

(то есть использование формул, задающих общее решение *краевой задачи Римана* или иначе, *задачи сопряжения*, для аналитических функций комплексного переменного), а также методы аналитической теории дифференциальных уравнений. Как правило, при использовании *комплексно-аналитических методов* удается установить более полные картины разрешимости рассматриваемых краевых задач и детально изучить вопросы, связанные с корректностью постановки и нётеровостью искомых задач. Более того, при некоторых дополнительных ограничениях на коэффициенты граничных условий рассматриваемых краевых задач комплексно-аналитический подход может привести к решению искомой задачи в так называемом *явном виде*.

Поскольку настоящая диссертация посвящена именно разработке явных и конструктивных методов решения краевой задачи типа задачи Пуанкаре (**задачи GP_1**) и важнейших ее частных случаев в классах обобщенных гармонических функций первого порядка, которые до сих пор оставались не исследованными, тематика диссертации является актуальной.

В первой главе диссертации приводятся некоторые вспомогательные понятия и утверждения, связанные с интегралом типа Коши, кратко излагаются логические схемы построения общих решений однородной и неоднородной задач Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций комплексного переменного, а также рассматриваются некоторые граничные свойства обобщенных гармонических функций в областях с аналитическими границами.

Дальнейший ход изложения результатов данной диссертации связан со следующим важнейшим фактом, а именно с тем, что обобщенные гармонические функции порядка n $(n>1)$ не инвариантны относительно конформных отображений. Поэтому методы решения краевой задачи типа задачи Пуанкаре (**задачи GP_1**) и ее частных случаев в круговых областях нельзя с помощью конформных отображений переносить на случай произвольных односвязных областей. В то же время в круговых областях удается найти более эффективные комплексно-аналитические методы решения задачи **задачи GP_1** и ее важнейших частных случаев (задачи Дирихле, задачи Неймана). В связи с этим в настоящей диссертации с учетом того, что окружность является *аналитической кривой*, сначала во второй главе разрабатываются *явные методы решения* краевых задач типа задачи Дирихле и Неймана в классах обобщенных гармонических функций первого порядка *в круговых областях*, затем, в третьей главе строится комплексно-аналитический метод решения задачи GP_1 *в круговых областях*, а в заключительной четвертой главе, на основе метода интегральных уравнений,

получен конструктивный алгоритм решения задачи $\boldsymbol{GP_1}$ *в произвольных односвязных областях с гладкими границами.*

Для определенности ниже приводятся общие постановки названных выше важнейших частных случаев основной задачи $\boldsymbol{GP_1}$.

I. Краевая задача типа задачи Дирихле для обобщенных гармонических функций первого порядка (кратко – **задача $\boldsymbol{GD_1}$**):

требуется найти все обобщенные гармонические функции W(z), принадлежащие классу $G_1(T^+)\cap H^{(1)}(L)$ *и удовлетворяющие на L условию*

$$W_+(t) = h(t), t \in L, \tag{3}$$

где h(t) – заданная на контуре L функция класса H(L) (т. е., удовлетворяющая на L условию Гельдера).

II. Краевая задача типа задачи Неймана для обобщенных гармонических функций первого порядка (кратко – **задача $\boldsymbol{GN_1}$**):

требуется найти все обобщенные гармонические функции W(z), которые принадлежат классу $G_1(T^+)\cap H^{(2)}(L)$ *и удовлетворяют на L условию*

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n_-} = g(t), t \in L, \tag{4}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_-}$ *– производная по внешней нормали к L, а g(t) – заданная на контуре L функция класса Гельдера H(L).*

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертационное исследование выполнено на кафедре математического анализа Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Смоленский государственный университет» в рамках научной школы «Краевые задачи комплексного анализа и их приложения» доктора физико-математических наук, профессора Карима Магомедовича Расулова.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований в Российской Федерации на долгосрочный период (2021–2030 гг.), направление фундаментальных и поисковых научных исследований 1.1.1. Теоретическая математика, раздел фундаментальных и поисковых научных исследований, 1.1.1.3. Математический анализ (утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 31 декабря 2020 г. № 3684-р).

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Основная *цель* данной диссертационной работы заключается в представлении конструктивного алгоритма решения краевой задачи Пуанкаре в классе обобщенных гармонических функций первого порядка (кратко, задачи $\boldsymbol{GP_1}$) в односвязных областях с гладкими границами, а также построении явных методов решения поставленной задачи и важнейших ее частных случаев – краевых задач Дирихле и Неймана в круговых областях вида $T_r^+ = \{z : |z| < r\}, 0 < r < 1$.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Построение комплексно-аналитических методов решения задачи $\boldsymbol{GP_1}$ и важнейших ее частных случаев, при условии, что в качестве носителя краевого условия (т. е. контура) выступает окружность $L_r = \{t : |t| = r\}$ радиуса r, где $0 < r < 1$;

2. Разработка конструктивного алгоритма решения задачи $\boldsymbol{GP_1}$ в случае, когда носителем краевого условия выступает произвольная односвязная область с гладкой границей;

3. Описание картин разрешимости краевой задачи $\boldsymbol{GP_1}$ и важнейших ее частных случаев, установление условий их нётеровсти, а также приведение конкретных примеров, иллюстрирующих основные результаты настоящего исследования.

В качестве *объекта исследования* выступает краевая задача типа задачи Пуанкаре (задача $\boldsymbol{GP_1}$) в классе обобщенных гармонических функций первого порядка.

В качестве *предмета исследования* рассматривается связь задачи $\boldsymbol{GP_1}$ и ее важнейших частных случаев с уже изученными краевыми задачами комплексного анализа и интегральными уравнениями Фредгольма второго рода.

Научная новизна

В данной диссертационной работе были впервые получены комплексно-аналитические методы решения краевой задачи типа задачи Пуанкаре (задачи $\boldsymbol{GP_1}$) и ее важнейших частных случаев (задач $\boldsymbol{GD_1}$ и $\boldsymbol{GN_1}$) в классах обобщенных гармонических функций первого порядка в круговых областях, а также разработан конструктивный метод решения задачи $\boldsymbol{GP_1}$ в произвольных односвязных областях с гладкими границами.

Положения, выносимые на защиту

1. Явные методы решения краевых задач $\boldsymbol{GD_1}$ и $\boldsymbol{GN_1}$ и установление условий их нётеровости в классах обобщенных гармонических функций первого порядка в круговых областях;

2. Комплексно-аналитический метод решения краевой задачи GP_1, а также установление условий её нётеровости в классе обобщенных гармонических функций первого порядка в случае круговых областей;

3. Конструктивный метод решения краевой задачи Пуанкаре GP_1 и установление необходимых и достаточных условий ее разрешимости в классе обобщенных гармонических функций первого порядка в случае произвольных односвязных областей с гладкими границами.

Личный вклад соискателя ученой степени в результаты диссертации с отграничением их от соавторов совместных исследований и публикаций

Все результаты диссертации получены соискателем лично. Научный руководитель поставил задачи, оказывал консультативную помощь по выбору методов их исследования, участвовал в анализе полученных результатов. В совместно подготовленных публикациях с научным руководителем К.М. Расуловым [1–А; 2–А; 4–А–14–А] научные результаты принадлежат соискателю, соавтор осуществлял консультационную помощь и независимую проверку полученных результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты, освещаемые в настоящей диссертационной работе, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: XX, XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI Международных научных конференциях «Системы компьютерной математики и их приложения», секция «Математика и ее приложения» (г. Смоленск, 17–19 мая 2019 г.; 22–23 мая 2020 г.; 28–29 мая 2021 г.; 27–28 мая 2022 г.; 26–27 мая 2023 г.; 24–25 мая 2024 г.; 23–24 мая 2025 г.); Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Функциональный анализ и математическое образование», посвященной 100-летию со дня рождения А.В. Штрауса, доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки РФ (г. Ульяновск, 8–9 октября 2020 г.); XVI и XVII Международной Казанской школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», (г. Казань, 22–27 августа 2023 г.; 23–28 августа 2025 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 14 научных работах, из них: 5 статей в научных журналах, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий (2,78 авт. л.), 2 – в других научных изданиях (0,34 авт. л.), 7 – в

сборниках материалов конференций (1,68 авт. л.). Общий объем опубликованных материалов составляет 4,8 авторских листа.

Структура и объем диссертации

Структура диссертации включает перечень сокращений и обозначений, введение, общую характеристику работы, четыре главы, заключение, список использованных источников. Полный объем составляет 114 страниц: текст диссертации – 104 страниц; список использованных источников занимает 10 страниц и состоит из 111 наименований, из них 14 – являются собственными публикациями автора.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Первая глава «Основные понятия и вспомогательные утверждения» состоит из четырех разделов. Раздел 1.1 посвящен основным теоремам из теории интеграла типа Коши, которые существенным образом используются при построении алгоритмов решения исследуемых в дальнейшем краевых задач.

В разделе 1.2 в качестве вспомогательной краевой задачи рассматривается краевая задача Римана (задача сопряжения) в классе кусочно аналитических функций комплексного переменного. Приводятся основные понятия и формулы, используемые для построения общих решений как однородной задачи Римана, так и соответсвуюшей неоднородной задачи Римана. В последующих главах эти формулы очень часто будут использованы при построении алгоритмов решения в круговых областях основных краевых задач, исследуемых в настоящей диссертации.

Раздел 1.3 посвящен некоторым граничным свойствам обобщенных гармонических функций первого порядка в областях с аналитическими границами.

Раздел 1.4 представляет собой краткий обзор литературы по краевым задачам в классах полианалитических и обобщенных гармонических функций.

Вторая глава «Явные методы решения краевых задач типа задач Дирихле и Неймана для обобщенных гармонических функций первого порядка в круговых областях» состоит из шести разделов.

В разделе 2.1 приводится точная постановка краевой задачи типа задачи Дирихле для обобщенных гармонических функций (задачи $\boldsymbol{GD_1}$) и подчеркивается, что данная задача является частным случаем краевой задачи типа задачи Пуанкаре (задачи $\boldsymbol{GP_1}$).

В разделе 2.2 излагается явный метод решение *однородной задачи* типа задачи Дирихле (задачи $\boldsymbol{GD}_1^{\circ}$) в круге $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$ и устанавливается следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $T_r^+ = \{z : |z| < r\}, r \in (0,1)$. *Тогда решение однородной задачи* $\boldsymbol{GD}_1^0$ *в классе* $G_1(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$ *сводится к последовательному решению однородной задачи Римана*

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^2}{r^2}\Phi^-(t), t \in L_r. \tag{5}$$

относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ *и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера*

$$z \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2r^2}{1-r^2} \cdot \varphi^+(z) = \Phi^+(z), z \in T_r^+, \tag{6}$$

$$z \cdot \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2r^2}{1-r^2} \cdot f^+(z) = F^+(z), z \in T_r^+, \tag{7}$$

относительно аналитических компонент искомой обобщенной гармонической функции, причем общее решение задачи $\boldsymbol{GD}_*^0$, *задаваемое формулами*

$$\varphi_0^+(z) = -\frac{(1-r^2)}{2r^4}C_0 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)C_1 \cdot z - \frac{(1-r^2)}{2r^2}C_2 \cdot z^2, \tag{8}$$

$$f_0^+(z) = \frac{1-r^2}{2r^2}\overline{C}_2 + \frac{1-r^2}{r^2(1+r^2)}\overline{C}_1 \cdot z + \frac{1-r^2}{2r^4}\overline{C}_0 \cdot z^2, \tag{9}$$

$$W_0(z) = \frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + \frac{2\overline{z}}{1-z\overline{z}}\varphi_0^+(z) + \frac{\overline{df_0^+(z)}}{dz} + \frac{2z}{1-z\overline{z}} \cdot \overline{f_0^+(z)}, z \in T^+, \tag{10}$$

линейно зависит от шести произвольных действительных постоянных $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$.

Раздел 2.3 посвящен явному решению неоднородной задачи типа задачи Дирихле (задачи $\boldsymbol{GD}_1$) в круге $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, где устанавливается следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $T_r^+ = \{z : |z| < r\}, r \in (0,1)$ *и* $h(t) \in H^{(1)}(L_r)$. *Тогда решение неоднородной задачи* $\boldsymbol{GD_1}$ *в классе* $G_1(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$ *сводится к последовательному решению неоднородной задачи Римана*

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^2}{r^2}\Phi^-(t) + t \cdot h(t), t \in L_r. \tag{11}$$

в классах ограниченных на бесконечности кусочно аналитических функций с линией скачков L_r *и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера первого порядка*

$$z \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2r^2}{1-r^2} \cdot \varphi^+(z) = \Phi^+(z), z \in T_r^+, \tag{12}$$

$$z \cdot \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2r^2}{1-r^2} \cdot f^+(z) = F^+(z), z \in T_r^+, \tag{13}$$

причем общее решение задачи $\boldsymbol{GD_1}$ *можно задавать формулой*

$$W(z) = W_0(z) + W_1(z), \ z \in T_r^+, \tag{14}$$

где $W_0(z)$ *– общее решение соответствующей однородной задачи* $\boldsymbol{GD_1^0}$, *задаваемая формулой (10), а* $W_1(z)$ *– частное решение данной неоднородной задачи* $\boldsymbol{GD_1}$, *которое также определяется в явном виде.*

Устанавливается нётеровость рассматриваемой задачи, а также приводится конкретный пример.

В разделе 2.4 дается точная постановка краевой задачи типа задачи Неймана для обобщенных гармонических функций в круговых областях. Также акцентируется внимание, что поставленная задача является частным случаем краевой задачи типа задачи Пуанкаре.

Раздел 2.5 освещает алгоритм решения однородной задачи типа задачи Неймана (задачи $\boldsymbol{GN_1^0}$) в круге $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$. Устанавливается следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $T_r^+ = \{z : |z| < r\}, r \in (0,1)$. *Тогда решение однородной задачи* $\boldsymbol{GN_1^{r0}}$ *сводится к последовательному решению однородной краевой задачи Римана*

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^2}{r^2}\Phi^-(t), t \in L_r. \tag{15}$$

и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера

$$z^2 \cdot \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{2r^2}{1-r^2} \cdot z \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2}\varphi^+(z) = \Phi^+(z), z \in T_r^+, \tag{16}$$

$$z^2 \cdot \frac{d^2f^+(z)}{dz^2} + \frac{2r^2}{1-r^2} \cdot z \cdot \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2} f^+(z) = F^+(z), z \in T_r^+; \tag{17}$$

причем общее решение задачи GN_1^0 *задается формулами*

$$W_0(z)=\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz}+\frac{2\bar{z}}{1-z\bar{z}}\varphi_0^+(z)+\overline{\frac{df_0^+(z)}{dz}}+\frac{2z}{1-z\bar{z}}\cdot\overline{f_0^+(z)},\ z\in T_r^+,$$

$$\varphi_0^+(z)=-\frac{(1-r^2)^2}{2r^4(1+r^2)}c_0-\frac{(1-r^2)^2}{4r^4}c_1\cdot z-\frac{(1-r^2)^2}{2r^2(1+r^2)}c_2\cdot z^2,\ z\in T_r^+, \qquad (18)$$

$$f_0^+(z)=\frac{(1-r^2)^2}{2r^2(1+r^2)}\bar{c}_2+\frac{(1-r^2)^2}{4r^4}\bar{c}_1\cdot z+\frac{(1-r^2)^2}{2r^4(1+r^2)}\bar{c}_0\cdot z^2,\ z\in T_r^+,$$

и оно линейно зависит от шести произвольных действительных постоянных $\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$.

В разделе 2.6 излагается алгоритм явного метода решения неоднородной задачи типа задачи Неймана (задачи GN_1) в круговых областях и исследуется картина ее разрешимости. Получен следующий основной результат.

Теорема 4. *Пусть* $T_r^+=\{z:|z|<r\},r\in(0,1)$ *и* $g(t)\in H^{(2)}(L_r)$. *Тогда решение неоднородной задачи* GN_1 *в классе* $G_1(T_r^+)\cap H^{(2)}(L_r)$ *сводится к последовательному решению неоднородной задачи Римана*

$$\Phi^+(t)=-\frac{t^2}{r^2}\Phi^-(t)+r\cdot t\cdot g(t),t\in L_r. \qquad (19)$$

и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера

$$z^2\cdot\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2}+\frac{2r^2}{1-r^2}\cdot z\cdot\frac{d\varphi^+(z)}{dz}+\frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2}\varphi^+(z)=\Phi^+(z),\ z\in T_r^+, \qquad (20)$$

$$z^2\cdot\frac{d^2f^+(z)}{dz^2}+\frac{2r^2}{1-r^2}\cdot z\cdot\frac{df^+(z)}{dz}+\frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2}f^+(z)=F^+(z),\ z\in T_r^+. \qquad (21)$$

причем в данном случае общее решение задачи GN_1 *задается формулой*

$$W(z)=W_0(z)+W_1(z),\quad z\in T_r^+, \qquad (22)$$

где $W_0(z)$ *– общее решение соответствующей однородной задачи* GN_1^0, *а* $W_1(z)$ *– частное решение данной неоднородной задачи* GN_1.

Устанавливается нётеровость рассматриваемой задачи, а также приводится конкретный пример.

Третья глава «Комплексно-аналитический метод решения краевой задачи типа задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций первого порядка в круговых областях» состоит из двух разделов.

В разделе 3.1 приводится точная постановка задачи GP_1 в классе обобщенных гармонических функций первого порядка в круговых областях.

Раздел 3.2 посвящен исследованию поставленной в предыдущем разделе краевой задачи. Получен следующий результат:

Теорема 5. *Пусть* $T_r^+ = \{z : |z| < r\}, 0 < r < 1$ *и выполняются условия*

$$a(t) \pm ib(t) \neq 0, t \in L_r. \tag{23}$$

Если индекс $\chi = \mathrm{Ind} G(t) = \mathrm{Ind} \dfrac{a(t) + ib(t)}{a(t) - ib(t)} < 2$, *то для разрешимости краевой задачи* $\boldsymbol{GP_1}$ *в круге* T_r^+ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\int_{L_r} Q_1(t)\omega_k(t)d\tau = 0, \ k = 1,2,...,v, \tag{24}$$

Если же $\chi = \mathrm{Ind} G(t) \geq 2$, *то для разрешимости краевой задачи* $\boldsymbol{GP_1}$ *в круге* T_r^+ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\int_{L_r} Q_2(t)\tilde{\omega}_k(t)d\tau = 0, k = 1,2,...,v-s, \tag{25}$$

При выполнении этих условий общее решение задачи $\boldsymbol{GP_1}$ *задается формулой*

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1-z\bar{z}} \cdot \varphi^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz}} + \frac{2z}{1-zz} \cdot \overline{f^+(z)}, z \in T^+, \tag{26}$$

где $f^+(z) = \overline{\varphi^-\left(\dfrac{r^2}{z}\right)}, z \in T_r^+$, *а* $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ – *общее решение дифференциальной задачи Римана вида*

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + A_1(t)\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + A_0(t)\varphi^+(t) - G(t)\frac{d^2\varphi^-(t)}{dt^2} - G_1(t)\frac{d\varphi^-(t)}{dt} - G_0(t)\varphi^-(t) = \tag{27}$$
$$= Q(t), \quad t \in L_r.$$

Устанавливается, что условие (23) является необходимым и достаточным условием нётеровости рассматриваемой задачи в круговых областях, а также приводится конкретный пример.

Глава 4 «Метод решения краевой задачи типа задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций первого порядка в случае произвольных односвязных областей» также, как и предыдущая, состоит из двух разделов.

В разделе 4.1 приводится точная постановка указанной краевой задачи.

В разделе 4.2 построен конструктивный метод решения задачи $\boldsymbol{GP_1}$ в произвольных односвязных областях, ограниченных кривыми Ляпунова, и устанавливаются следующие основные результаты:

Теорема 6. *Пусть* $a(t) \pm ib(t) \neq 0, t \in L$. *Тогда решение граничной задачи* $\boldsymbol{GP_1}$ *сводится к последовательному решению интегро-дифференциальной задачи Гильберта вида*

$$\operatorname{Re}\left\{ i\overline{M_2(t)}\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + i\overline{M_1(t)}\frac{df^+(t)}{dt} + i\overline{M_0(t)}f^+(t) \right\} +$$

$$+\operatorname{Re}\left\{ \frac{-i}{2}\left(\sum_{k=0}^{2}\int_L \Omega_{2k}(t,\tau)\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}d\tau + \sum_{k=0}^{2}\int_L \Psi_{2k}(t,\tau)\overline{\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}}d\tau \right) \right\} = \qquad (28)$$

$$= Q_2(t), \ t \in L,$$

относительно аналитической функции $f^-(z)$ *и дифференциальной задачи Гильберта вида*

$$\operatorname{Re}\left\{ G_2(t)\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + G_1(t)\frac{d\varphi^+(t)}{dz} + G_0(t)\varphi^+(t) \right\} = Q(t), \quad t \in L, \qquad (29)$$

относительно аналитической функции $\varphi^+(z)$. *Для того, чтобы граничная задача* $\boldsymbol{GP_1}$ *была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы обе вспомогательные задачи Гильберта* (28) *и* (29).

Теорема 7. *Краевая задача типа задачи Пуанкаре в классе обобщенных гармонических функций первого порядка (задача* $\boldsymbol{GP_1}$*) будет нётеровой тогда и только тогда, когда* $a(t) \pm ib(t) \neq 0, t \in L$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. В случае, когда в качестве носителя краевого условия (т. е. контура) выступает окружность $L_r = \{t : |t| = r\}$, $0 < r < 1$ (аналитическая кривая) с использованием комплексно-аналитического подхода получены *явные методы решения* важнейших частных случаев краевой задачи типа задачи Пуанкаре, а именно, краевой задачи типа задачи Дирихле (задачи $\boldsymbol{GD_1}$) и краевой задачи типа задачи Неймана (задачи $\boldsymbol{GN_1}$) в классах обобщенных гармонических функций первого порядка. Установлено, что в рассматриваемом случае решение задачи $\boldsymbol{GD_1}$ сводится к последовательному решению задачи Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций комплексного переменного и двух линейных дифференциальных уравнений

Эйлера первого порядка в классах аналитических функций, а решение задачи GN_1 сводится к последовательному решению задачи Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций комплексного переменного и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера второго порядка в классах аналитических функций. Построены полные картины разрешимости задач GD_1 и GN_1, а также установлено, что эти задачи являются нётеровыми. Основные теоретические результаты продемонстрированы на конкретных примерах [1–А; 5–А; 8–А; 9–А; 10–А; 11–А].

2. В случае, когда носителем краевого условия является окружность $L_r = \{t : |t| = r\}$, $0 < r < 1$ разработан комплексно-аналитический метод решения задачи GP_1 в классах обобщенных гармонических функций первого порядка. Установлены достаточные условия, при которых задача GP_1 в классе обобщенных гармонических функций первого порядка в круговых областях равносильна (в смысле разрешимости) хорошо изученной невырожденной дифференциальной задаче Римана для аналитических функций комплексного переменного. На этой основе получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи GP_1 в круговых областях, а также установлена её нётеровость. В качестве примера рассмотрена однородная задача типа задачи Пуанкаре (задача GP_1^0), при определенных значениях коэффициентов краевого условия. Установлено, при указанных значениях коэффициентов краевого условия, задача GP_1^0 допускает решение в явном виде [3–А; 4–А; 6–А; 7–А; 12–А; 13–А].

3. В случае произвольных односвязных областей, ограниченных замкнутыми *кривыми Ляпунова*, на основе метода интегральных уравнений получен конструктивный алгоритм решения задачи GP_1 в классах обобщенных гармонических функций первого порядка, суть котрого состоит в том, что при определенных ограничениях на коэффициенты краевого условия задачи GP_1, её решение сводится к последовательному решению хорошо известных в теории краевых задач комплексного анализа интегро-дифференциальной и дифференциальной задач Гильберта в классах аналитических функций комплексного переменного. Кроме того, в рассматриваемом случае установлены необходимые и достаточные условия нётеровости краевой задачи GP_1 [2–А; 14–А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Настоящее диссертационное исследование носит теоретический характер. Полученные в данной работе результаты могут использоваться учеными, аспирантами, магистрантами и студентами, которые проводят исследования в области краевых задач в классах различных обобщений аналитических функций, а также служить полезным материалом при

составлении лекций и чтении дисциплин по выбору для студентов бакалавриата и магистратуры учреждений образования физико-математического профиля.

Одно из перспективных направлений дальнейшего развития исследования заключается в изучении аналогичных задач, в случае, когда носителем краевого условия является кусочно-гладкая кривая или/и область является многосвязной. Кроме того, еще одним важным направлением дальнейшего развития исследования естественно является изучение краевой задачи типа задачи Пуанкаре и её важнейших частных случаев в классах обобщенных гармонических функций порядка n, где $n \geq 2$.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1–А. Расулов, К. М. О решении в явном виде краевой задачи Нейманадля дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях / К. М. Расулов, Т. Р. Нагорная // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т. 21, № 3. – С. 326–335.

2–А. Нагорная, Т. Р. О решении краевой задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в односвязных областях / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Журнал Белорусского государственного университета. Серия: Математика. Информатика. – 2024. – № 1. – С. 6–15.

3–А. Нагорная, Т. Р. О решении задачи с косой производной для обобщенных гармонических функций второго порядка в круговых областях / Т. Р. Нагорная // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2025. – Т. 15, № 1. – С. 23–29.

4–А. Расулов, К. М. Об одном методе решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях / К. М. Расулов, Т. Р. Нагорная // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2025. – Т. 25, № 1. – С. 46–52.

5–А. Нагорная, Т. Р. О решении в явном виде задачи Неймана для обобщенных гармонических функций первого порядка в круговых областях / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2025. – Т. 15, № 3. – С. 17–26.

Статьи в других научных изданиях

6–А. Нагорная, Т. Р. О краевой задаче Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Научно-технический вестник Поволжья. – 2022. – № 7. – С. 32–35.

7–А. Нагорная, Т. Р. Алгоритм явного решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций второго порядка в круговых областях / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Научно-технический вестник Поволжья. – 2022. – № 11. – С. 24–27.

Материалы конференций

8–А. Нагорная, Т. Р. О задаче Дирихле для одного дифференциального уравнения эллиптического типа / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XX Междунар.

науч. конф., г. Смоленск, 17–19 мая 2019 г. : в 2 ч. / Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – 2019. – Вып. 20, ч. 2. – С. 90–96.

9–А. Нагорная, Т. Р. О краевой задаче Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XXI Междунар. науч. конф., г. Смоленск, 22–23 мая 2020 г. / Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – 2020. – Вып. 21. – С. 315–319.

10–А. Нагорная, Т. Р. О разрешимости однородной задачи Дирихле в классах обобщенных гармонических функций второго порядка / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XXII Междунар. науч. конф., г. Смоленск, 28–29 мая 2021 г. / Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – 2021. – Вып. 22. – С. 283–291.

11–А. Нагорная, Т. Р. О решении задачи Неймана для обобщенных гармонических функций третьего порядка в круговых областях / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XXIII Междунар. науч. конф., г. Смоленск, 27–28 мая 2022 г. / Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – 2022. – Вып. 23. – С. 269–275.

12–А. Нагорная, Т. Р. Об одном методе решения задачи с косой производной для обобщенных гармонических функций в круговых областях / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : межвузовский сб. науч. тр. XXIV Междунар. науч. конф., г. Смоленск, 26–27 мая 2023 г. / Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – 2023. – Вып. 24. – С. 300–305.

13–А. Нагорная, Т. Р. О решении задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского : сб. тр. по материалам XVI Междунар. Казан. шк.-конф. «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 22–27 авг. 2023 г. / Казан. (Приволж.) федерал. ун-т [и др.] ; науч. ред. С. Р. Насыров. – Казань, 2023. – Т. 66. – С. 174–175.

14–А. Нагорная, Т. Р. Об одном случае эффективного решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в односвязных областях / Т. Р. Нагорная, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : межвузовский сб. науч. тр. XXV Междунар. науч. конф., г. Смоленск, 24–25 мая 2024 г. / Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред) [и др.]. – 2024. – Вып. 25. – С. 256–260.

РЕЗЮМЕ

Нагорная Татьяна Романовна

Краевая задача типа задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций первого порядка

Ключевые слова: обобщенная гармоническая функция, краевая задача типа задачи Пуанкаре, задачи Дирихле и Неймана, уравнение Фредгольма

Цель работы: представление конструктивного алгоритма решения краевой задачи Пуанкаре в классе обобщенных гармонических функций первого порядка (кратко, задачи $\boldsymbol{GP_1}$) в односвязных областях с гладкими границами, а также построение явных методов решения поставленной задачи и важнейших ее частных случаев – краевых задач Дирихле и Неймана в круговых областях вида $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$.

Методы исследования: методы комплексного анализа, теория интегральных уравнений Фредгольма, аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений, теория краевых задач комплексного анализа.

Полученные результаты и их новизна: 1. В случае, когда носителем краевого условия выступает окружность $L_r = \{t : |t| = r\}$, $0 < r < 1$ установлено, что решение каждой из задач $\boldsymbol{GD_1}$ и $\boldsymbol{GN_1}$ сводится к последовательному решению классической задачи Римана для аналитических функций комплексного переменного и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера.

2. В случае, когда носителем краевого условия является окружность $L_r = \{t : |t| = r\}$, $0 < r < 1$ доказана, что задача $\boldsymbol{GP_1}$ равносильна (в смысле разрешимости) невырожденной дифференциальной задаче Римана для аналитических функций комплексного переменного, а также установлены условия её нётеровости.

3. В случае произвольных односвязных областей, ограниченных *кривыми Ляпунова,* установлено, что решение задачи $\boldsymbol{GP_1}$ сводится к последовательному решению интегро-дифференциальной и дифференциальной задач Гильберта для аналитических функций комплексного переменного.

Рекомендации по использованию. Настоящее диссертационное исследование носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут использоваться учеными, аспирантами и студентами, которые проводят исследования в области краевых задач комплексного анализа, а также служить полезным материалом при разработке дисциплин по выбору для студентов физико-математических факультетов университетов.

Область применения: краевые задачи комплексного анализа, задачи плоской теории упругости.

РЭЗЮМЭ

Нагорная Таццяна Раманаўна

Краявая задача тыпу задачы Пуанкарэ для абагульненых гарманічных функцый першага парадку

Ключавыя словы: абагульненая гарманічная функцыя, краявая задача тыпу задачы Пуанкарэ, задачы Дырыхле і Нэймана, ураўненне Фрэдгольма

Мэта работы: прадстаўленне канструктыўнага алгарытма рашэння краявой задачы Пуанкарэ ў класе абагульненых гарманічных функцый першага парадку (кратка, задачы $\boldsymbol{GP_1}$) у аднасувязных абласцях з гладкімі межамі, а таксама пабудова відавочных метадаў рашэння пастаўленай задачы і найважнейшых яе прыватных выпадкаў – краявых задач Дырыхле і Нэймана ў кругавых абласцях выгляду $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$.

Метады даследавання: метады камплекснага аналізу, тэорыя інтэгральных ураўненняў Фрэдгольма, аналітычная тэорыя лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў, тэорыя краявых задач камплекснага аналізу.

Атрыманыя вынікі і іх навізна: 1. У выпадку, калі носьбітамі краявой умовы выступае акружнасць $L_r = \{t : |t| = r\}$, $0 < r < 1$ устаноўлена, што рашэнне кожнай з задач $\boldsymbol{GD_1}$ и $\boldsymbol{GN_1}$ зводзіцца да паслядоўнага рашэння класічнай задачы Рымана для аналітычных функцый камплекснай пераменнай і двух лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў Эйлера.

2. У выпадку, калі носьбітамі краявой умовы з'яўляецца акружнасць $L_r = \{t : |t| = r\}$, $0 < r < 1$ даказана, што задача $\boldsymbol{GP_1}$ раўнасільна (у сэнсе вырашальнасці) нявыраджанай дыферэнцыяльнай задачы Рымана для аналітычных функцый камплекснай пераменнай, а таксама ўстаноўлены ўмовы яе нётэравасці.

3. У выпадку адвольных аднасувязных абласцей, абмежаваных *крывымі Ляпунова*, устаноўлена, што рашэнне задачы $\boldsymbol{GP_1}$ зводзіцца да паслядоўнага рашэння інтэгра-дыферэнцыяльнай і дыферэнцыяльнай задач Гільберта для аналітычных функцый камплекснай пераменнай.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Дадзенае дысертацыйнае даследаванне мае тэарэтычны характар. Атрыманыя ў ім вынікі могуць выкарыстоўвацца вучонымі, аспірантамі і студэнтамі, якія праводзяць даследаванні ў галіне краявых задач камплекснага аналізу, а таксама служыць карысным матэрыялам пры распрацоўцы дысцыплін па выбары для студэнтаў фізіка-матэматычных факультэтаў універсітэтаў.

Галіна выкарыстання: краявыя задачы камплекснага аналізу, задачы плоскай тэорыі пругкасці.

SUMMARY

Nagornaya Tatyana Romanovna

The boundary value problem of the Poincaré problem type for generalized harmonic functions of the first order

Keywords: generalized harmonic function, boundary value problem of the Poincaré problem type, Dirichlet boundary value problem, Neumann boundary value problem, Fredholm equation

Aim of word: To present a constructive algorithm for solving the Poincaré boundary value problem in the class of generalized first-order harmonic functions (briefly, the GP_1 problem) in simply connected domains with smooth boundaries, as well as to construct explicit methods for solving the stated problem and its most important special cases – the Dirichlet and Neumann boundary value problems in circular domains of the $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$.

Research methods: methods of the theory of functions of a complex variable, the theory of Fredholm integral equations of the second kind, analytical theory of linear differential equations, the theory of Riemann and Hilbert boundary value problems for analytic functions.

Obtained results and their novelty: 1.In the case where the support of the boundary condition is a circle $L_r = \{t : |t| = r\}$, $0 < r < 1$, it is established that the solution to each of the GD_1 and GN_1 problems reduces to the successive solution of the classical Riemann problem for analytic functions of a complex variable and two linear Euler differential equations.

2.In the case where the support of the boundary condition is a circle $L_r = \{t : |t| = r\}$, $0 < r < 1$, it is proved that the GP_1 problem is equivalent (in terms of solvability) to a non-degenerate differential Riemann problem for analytic functions of a complex variable, and the conditions for its Noetherian property are established.

3. For arbitrary simply connected domains bounded by *Lyapunov curves*, solving the GP_1 problem reduces to sequentially solving the well-known integro-differential and differential Hilbert problems for analytic functions of a complex variable.

Recommendations for use. This dissertation research is theoretical in nature. The results obtained can be used by researchers, graduate students conducting research in the field of boundary value problems in complex analysis, as well as serve as useful material for developing elective courses for students of physics and mathematics departments at universities.

Application field: boundary value problems in complex analysis, problems of plane elasticity theory.