

УТВЕРЖДАЮ

Директор

Государственного научного учреждения

«Институт математики

Национальной академии наук Беларуси»

Сафонов В.Г.

«2027» 2026 г.



ОТЗЫВ ОПОНИРУЮЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Государственного научного учреждения

«Институт математики Национальной академии наук Беларуси»

на диссертацию Поцейко Павла Геннадьевича

«Рациональные интегральные операторы на отрезке и методы суммирования», представленную на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук по специальности

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки.

Содержание и результаты диссертации Поцейко П.Г. относятся к отрасли физико-математических наук и соответствуют специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ. В диссертации изучаются аппроксимационные свойства специальных интегральных операторов, в том числе предложенных автором, даются оценки приближений такими операторами функций из специальных классов, исследуется проблема асимптотической точности таких оценок. Вопросы, на которые даются ответы в диссертации, соответствуют следующим областям исследования паспорта специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, утвержденного приказом Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 18.12.2017 № 292: теория функций одной и многих

вещественных переменных; теория функций одной и многих комплексных переменных; теория операторов (в том числе интегральных, дифференциальных, разностных и др.) и операторных уравнений; теория приближений и численный анализ.

Научный вклад соискателя в разработку научной проблемы с оценкой его значимости.

Диссертация посвящена концептуальному развитию конструктивных методов рациональной аппроксимации, т.е. приближениям функций рациональными отображениями с помощью явных конструкций.

В исследовании соискателя за основу взята конструкция рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва, которая получила в диссертационной работе полное и всестороннее развитие. В диссертации исследуются аппроксимационные свойства этого оператора на критически важных в теории приближений классах функций, это функции Маркова, интегралы Пуассона, сингулярные интегралы. Автором получены интегральные представления для приближений функций из этих классов рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышева и близкими к нему операторами, доказаны поточечные и равномерные оценки приближений функций из этих классов. В работе убедительно показана эффективность разработанного метода, сочетающего в себе явное представление рационального приближения и хорошую асимптотическую точность аппроксимации, во многих случаях совпадающую с оптимальной.

Хотя идейно работа восходит к методам анализа Фурье, основанным на выборе подходящего интегрального ядра, принципиальной особенностью авторского метода является многопараметричность рассматриваемого рационального интегрального оператора Фурье–Чебышева и его естественных вариаций, как раз и позволяющая добиваться хорошей скорости приближения. По смыслу многопараметричность рассматриваемого интеграла соответствует отказу от геометрической фиксации набора полюсов в пользу их относительно

свободного расположения на комплексной плоскости на каждом шаге аппроксимации. Следует отметить, что сам подбор оптимальных параметров метода для конкретных функций является достаточно трудоемкой работой, которая, тем не менее, была очень аккуратно и скрупулезно проделана соискателем в его диссертации.

Важно подчеркнуть, что до работы соискателя рациональная аппроксимация функций на отрезке исследовалась в достаточно ограниченном объеме. Это объясняется сложностью области исследования. В отличие от аппроксимации рациональными функциями в комплексной области (см. классические работы Уолша, Гончара, Долженко, Мергеляна, Витушкина), теория приближений функций на вещественной прямой оказалась более сложной с точки зрения систематизации и построения общей теории, и особенно трудной для конструктивных решений. Были получены отдельные результаты, среди которых выделяется классический результат Ньюмена об аппроксимации модуля, показывающие, что рациональная аппроксимация может давать качественно лучшее приближение, чем полиномиальная (в случае с модулем при рациональной аппроксимации получается экспоненциальная скорость убывания погрешности по сравнению с простой обратной пропорциональностью относительно степени приближающего полинома при полиномиальной аппроксимации). В работе соискателя приведены разнообразные примеры, подтверждающие принципиально большие возможности рациональной аппроксимации по сравнению с полиномиальной, и эти возможности реализуются с помощью предложенных автором методов. При этом и в случае полиномиальной аппроксимации рассматриваемые в диссертации конструкции, как показано соискателем, могут давать приближения, близкие к теоретически оптимальным.

Считаем, что вклад соискателя в теорию рациональной аппроксимации весьма существенен и достаточно значителен, чтобы присудить соискателю ученую степень доктора физико-математических наук.

Конкретные научные результаты, за которые соискателю может быть присуждена ученая степень доктора наук.

Поцейко П.Г. может быть присуждена ученая степень доктора физико-математических наук за новые конструктивные методы рациональной аппроксимации на основе развития методов суммирования рядов Фурье. Соискателем

– подробно изучены рациональные интегральные операторы Фурье–Чебышева, а также суммы Фейера, Валле Пуассона, Абеля–Пуассона, Рисса и Зигмунда–Рисса этих операторов, найдены интегральные представления для этих конструкций, а также интегральные представления приближений этими конструкциями функций со степенной особенностью, функций Маркова, интегралов Пуассона, сингулярных интегралов со специальными ядрами и весами, и решены аналогичные задачи для сопряженных функций с помощью соответствующих сопряженных конструкций.

получены оценки поточечных и равномерных приближений предложенными методами функций со степенной особенностью, функций Маркова, интегралов Пуассона, сингулярных интегралов, сопряженных функций. Эти оценки наглядно демонстрируют преимущество рациональной аппроксимации над полиномиальной, а также показывают эффективность авторских методов, которые сочетают в себе конструктивность и быструю скорость убывания приближения, асимптотически близкую к оптимальной. В случае фиксированного количества геометрически различных полюсов автором найдены асимптотические выражения для мажоранты равномерных приближений и оптимальный набор параметров рациональных функций, при котором эта мажоранта имеет наибольшую скорость убывания.

Методы автора развиты им всесторонне, полно и детально. Возникающие эффекты, в том числе превосходство рациональной аппроксимации данными методами над полиномиальной аппроксимацией, а также асимптотическая оптимальность предложенных конструкций, хорошо проиллюстрированы примерами. В итоге можно сказать, что конкретные

научные результаты соискателя, включая описанные в работе конструкции и полученные оценки аппроксимации функций из специальных классов, достаточны для присуждения их автору ученой степени доктора физико-математических наук.

Замечания по диссертации.

1. В диссертации нет общих результатов об аппроксимационных свойствах рассматриваемых конструкций на стандартных множествах непрерывных функций, описываемых, например, в терминах наличия или отсутствия определенной степени гладкости функции. Хотя в работе подробно исследованы возможности предложенных автором методов рациональной аппроксимации на функциях специального вида, представляется естественным, для лучшего понимания перспективы рассматриваемых методов, видеть в диссертации и более общие результаты.

2. В работе имеются качественные выводы по полученным результатам. Однако с учетом громоздкости полученных формул для оценок погрешностей приближений, можно сказать, что таких качественных выводов относительно мало. Для лучшего понимания результатов автора было бы полезно дополнить некоторые формулы более грубыми, но более простыми по форме оценками (возможно, при дополнительных ограничениях на класс рассматриваемых функций). Некоторые представленные в работе конкретные примеры было бы хорошо снабдить графиками с функциями и их приближениями, а также численными расчетами.

3. Полезно было бы провести в работе подробное и явное сравнение по точности аппроксимации рассматриваемого метода с другими конструктивными методами, такими как аппроксимация Паде, и итерационными алгоритмами, такими как алгоритмы Ремеза, Чили–Лоеба, ААА (adaptive Antoulas--Anderson) и др.

4. Первые два пункта списка Положений, выносимых на защиту, начинаются перечислением объектов исследования (суммы Фейера, Валле

Пуссена, рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышева и др. конструкции), это представляется нам неудачным по форме, так как объект не может быть положением. Хотя по смыслу ясно, что автор защищает созданные им конкретные объекты. Возможно, следовало написать, что автором введены и исследованы определенные конструкции. Или, ближе к смыслу работы, что автором выносятся на защиту именно методы, основанные на использовании соответствующих идей из теории суммирования рядов Фурье, их конкретизации в контексте рациональной аппроксимации, обобщении и развитии, а также соответствующие явные конструкции, интегральные представления для приближений (об этом написано) на рассматриваемых классах функций.

5. В работе имеются опечатки и неточности языка, но во всех таких местах смысл легко восстанавливается, поэтому нет причин перечислять их здесь. В целом, работа очень аккуратна, формулировки результатов выверены, последовательность изложения и структура диссертации логичны. Видно, что автор тщательно работал над текстом.

Все отмеченные недостатки не влияют на итоговую оценку работу. Считаем, что полученные автором результаты достаточны для присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени доктора физико-математических наук.

Соискателем проделана большая, трудоемкая и сложная работа по развитию методов конструктивной рациональной аппроксимации, реализации собственных оригинальных идей в рамках этой тематики, строгому обоснованию эффективности предлагаемых конструкций, сравнительному анализу своих результатов с достижениями других авторов. Выполненная работа убедительно демонстрирует хорошее владение автора общими и специальными методами вещественного и комплексного анализа, глубокое понимание проблематики теории аппроксимации, способность находить

новые и остроумные решения сложных классических задач. Не вызывает сомнения, что научная квалификация соискателя соответствует ученой степени доктора физико-математических наук.

Конкретные рекомендации по использованию результатов диссертации.

Рассматриваемые в диссертационной работе классы функций, особенно сингулярные интегралы, широко используются в прикладных задачах, так как с помощью них описываются многие физические, химические, биологические процессы. В связи с этим представляется целесообразным использовать полученные в диссертации конструкции для приближения сингулярных интегралов при компьютерном моделировании естественных и технических процессов, в математических моделях которых возникают такие интегралы.

Отметим еще, что в последнее время важным направлением является изучение аппроксимационных свойств нейронных сетей, являющихся сложными функциями глубокой степени вложенности, состоящими из линейных и нелинейных составляющих. Представляется возможным, что часть разработанных автором методов могут быть перенесены в эту относительно новую теорию. В частности, рациональная аппроксимация функций активации может упростить вычислительные процедуры с нейронными сетями. Обобщением нейронных сетей являются нейронные операторы, представляющие собой специальные интегральные операторы, рациональная аппроксимация которых может помочь лучше понять их свойства и перейти от качественных оценок возможностей нейронных операторов к количественным.

Вывод о соответствии диссертации установленным требованиям.

Диссертация соответствует п. 20 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий, в редакции Указа Президента Республики Беларусь от 23.06.2023 № 180.

Диссертация содержит:

- обоснованную постановку научной задачи (построение и тщательное изучение новых методов рациональной аппроксимации, основанных на методах рядов Фурье и их модификациях, исследование их аппроксимационных свойств на специальных классах функций),
- подробный обзор и анализ имеющейся по теме литературы и результатов других авторов,
- конкретные формулировки полученных новых научных результатов, характеризующие вклад соискателя ученой степени в теорию приближений, а также сравнительную оценку их научной значимости,
- детальное описание используемых методов,
- выводы по каждой главе,
- заключение, содержащее перечень основных результатов соискателя,
- рекомендации по использованию полученных научных результатов, а также Приложение с актами о внедрении полученных результатов в учебный процесс,
- список использованных источников,
- список публикаций автора, отражающих основные научные результаты диссертации.

Отметим, что часть работ соискателя написана им в соавторстве с Е.А Ровбой и К.А. Смотрицким. Однако автором диссертации в Общей характеристике работы представлено разграничение вклада соавторов в общие статьи, и утверждается, что все основные результаты диссертации и все положения диссертации, выносимые на защиту, принадлежат автору лично и получены самостоятельно.

Диссертация соответствует п. 21 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий. Она посвящена концептуальному развитию одного из актуальных научных направлений современной математики – методам рациональной аппроксимации. Диссертация содержит принципиально новые научные результаты, совокупность которых является

крупным достижением в теории приближений, и имеет существенное значение как для математики в целом, так и для ее приложений в естественных и технических науках, а именно:

- в моделировании и описании физических явлений и технических процессов, в которых возникают сингулярные интегралы,
- при аппроксимации функций активации и ошибок в нейронных сетях.

Важно отметить, что в Республике Беларусь на основе многолетней работы разных коллективов сформировалась сильная математическая школа по теории рациональной аппроксимации, занимающая в определенных направлениях лидирующие позиции в мире. Работа соискателя дополняет вклад белорусской науки в мировую, закрепляет приоритет нашей страны в соответствующей области математики, способствует сохранению и развитию белорусской школы рациональной аппроксимации.

Результаты автора опубликованы в 35 научных работах, из которых 19 удовлетворяют п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий. Отметим, что результаты опубликованы в том числе и в таких авторитетных международных математических журналах, как «Математический сборник» и «Алгебра и анализ».

Результаты автора апробированы как на международных конференциях, так и на специальных математических семинарах (в том числе на семинаре «Конструктивная теория функций» Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН).

Считаем, что за предложенные соискателем методы рациональной аппроксимации, их детальную разработку, тщательный сравнительный анализ эффективности этих методов, а также полученные результаты о рациональных приближениях этими методами функций из специальных классов, ему может быть присуждена ученая степень доктора физико-математических наук.

Отзыв на диссертацию Поцейко П.Г., согласно приказу директора Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» от 21.01.2026 № 11-к, рассмотрен на специально

организованном научном семинаре Института математики НАН Беларуси 27 января 2026 года, протокол № 1-26.


Поцейко П.Г. выступил на этом семинаре с докладом «Рациональные интегральные операторы на отрезке и методы суммирования», в котором представил основные результаты своей диссертации и используемые методы, а также провел сравнительный анализ своих результатов с имеющимися на данный момент достижениями в теории аппроксимации. На семинаре состоялась дискуссия, соискатель ответил на все вопросы.

В работе семинара и в голосовании по приему отзыва о диссертации принимали участие 6 докторов физико-математических наук (академик НАН Беларуси Корзюк В.И., Бахтин В.И., Деменчук А.К., Костюкова О.И., Лебедев А.В., Лыков К.В.) и 2 кандидата физико-математических наук (Кушель О.Ю., Мильман В.А.)

Результаты голосования «за» – 8, «против» – 0, «воздержались» – 0.

Председатель научного семинара:

доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник отдела
дифференциальных уравнений

 А.К. Деменчук

Секретарь научного семинара:

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник отдела
функционального анализа и динамических систем


О.Ю. Кушель

Эксперт оппонировавшей организации:

доктор физико-математических наук,
заведующий отделом
функционального анализа и динамических систем


К.В. Лыков