ОТЗЫВ
официального оппонента

на диссертацию Поцейко Павла Геннадьевича «Рациональные интегральные операторы на отрезке и методы суммирования», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которым она представлена к защите

Задачи, исследуемые в диссертации П.Г.Поцейко, относятся к теории приближения функций. По постановкам рассматриваемых задач и методам их исследования диссертация относится к действительному и комплексному анализу, полностью соответствует специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а также отрасли «физико-математические науки», по которым она представлена к защите.

Актуальность темы диссертации

Гармонический анализ с самого своего зарождения при решении некоторых задач математической физики заставлял математиков переосмысливать и развивать базовые понятия, на языке которых математики ведут свои исследования. Так именно, при решении вопросов, возникших в гармоническом анализе, приняли современный вид понятия множества (Г.Кантор) и функции (Н.И.Лобачевский, Л.Дирихле, Р.Дедекинд) — одни из самых важных объектов математики.

С другой стороны, гармонический анализ являлся источником многих новых математических идей, породив, в частности, теорию рядов вообще и рядов Фурье (гармонических разложений), в частности. Расходимость рядов Фурье непрерывных функций (Э.Дюбуа-Реймон), а также равномерная сходимость средних арифметических частных сумм Фурье (Л.Фейер) явились мощным толчком к исследованию совершенно новых задач в теории приближения. Появилось много методов суммирования (в частности была создана общая теория суммирования числовых рядов), которые использовались в гармоническом анализе. Эти методы суммирования рядов Фурье интенсивно изучались с различных точек зрения.

Ортогональных систем, состоящих из рациональных функций, построено совсем немного — наиболее известны две: система Такенаки—Мальмквиста для единичной окружности в комплексной плоскости и система Джрбашяна–Китбаляна для случая отрезка $[-1, 1]$. Последняя, обобщающая ортогональную систему полиномов Чебышева первого рода, была, кстати, спустя 30 лет переоткрыта другими математиками.

Система Джрбашяна–Китбаляна применялась в задачах рациональной аппроксимации функций, в частности, в работах Е.А.Ровбы и его учеников.

Основная идея диссертации П.Г.Поцейко состоит в следующем. Операторы частных сумм Фурье $s_n f$ по системе Джрбашяна–Китбаляна являются рациональными функциями с предписанными n полюсами, которые задаются при построении этой системы. П.Г.Поцейко отказывается от жесткой фиксации этих полюсов и делает их параметрами оператора $s_n f$, меняя множество параметров на каждом шаге аппроксимации. Способ выбора этого множества зависит, конечно, от рассматриваемой задачи рациональной аппроксимации. Тем самым, кажется, теряется связь метода приближения с гармоническим анализом. На самом деле, на каждом шаге происходит перестроение ортонормированной системы. Точнее, выбор множества полюсов, меняет не саму систему, а множество полюсов, которые ее определяют.

Для полученной последовательности операторов, как и для классических сумм Фурье, можно организовать различные средние и исследовать их аппроксимационные свойства с позиций общей теории рациональной аппроксимации.

Для рассматриваемых методов суммирования (Фейера, Валле–Пуссена, Рисса и Зигмунда–Рисса, Абеля–Пуассона) в диссертации изучаются следующие задачи, традиционные для теории приближений в целом и для рациональной аппроксимации. В данном случае эти задачи таковы: получить интегральные представления для приближающих операторов и уклонений и их от приближаемых функций, получить оценки для этих уклонений, попытаться выбрать параметры задачи (полюсы) оптимальным образом, изучить асимптотики приближения конкретных функций и сравнить их с полиномиальным случаем (то есть, выяснить, дают ли линейные рациональные методы лучшее приближение по сравнению с простейшим — полиномиальным).

Все это свидетельствует о том, что тема диссертационной работы П.Г.Поцейко является безусловно актуальной.

Содержание диссертации и степень новизны полученных результатов

В первой главе дается содержательное изложение известных результатов, относящихся к тема диссертации.

Основным объектом исследования в диссертации являются интегральные операторы Фурье–Чебышева, определяемые следующим образом. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — набор чисел, где a_k либо действительны и $|a_k| < 1$, либо $a_k \in \mathbb{C}$ и тогда в набор A_n должно входить и $\overline{a}_k$ (множество A_n называется множеством параметров оператора Фурье–Чебышева

$$s_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\sin\left(\dfrac{v-u}{2} + \lambda_n(u,v)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}} dv, \quad x = \cos u, \tag{1}$$

где

$$\lambda_n(u,v) = \int\limits_u^v \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y - \arg z_k) + |z_k|^2}\, dy, \quad z_k = \frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}}.$$

Такие операторы возникают как частные суммы Фурье по ортонормированной (на $[-1,1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$) системе рациональных функций Джрбашяна–Китбаляна. Можно показать, что $s_n f$ является рациональной функцией вида

$$p_n(x) \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k x)^{-1},$$

где p_n — алгебраический полином степени n.

В главе 2 изучаются рациональные приближения функций Маркова

$$\widehat{\mu}(x) = \int\limits_{\operatorname{supp}\mu} \frac{d\mu(t)}{t-x}$$

от абсолютно непрерывной меры μ, сосредоточенной на отрезке $\operatorname{supp}\mu = [1, a]$, $a > 1$.

В §2.1 сначала доказывается теорема 2.1, дающая явные поточечные выражения для уклонений $\widehat{\mu}(x) - s_n\widehat{\mu}(x)$ и оценки для равномерных норм уклонений $\widehat{\mu} - s_n\widehat{\mu}$. Далее теорема 2.1 используется для оценок $\|\widehat{\mu} - s_n\widehat{\mu}\|_C$ при дополнительных предположениях относительно свойств меры μ при специальном выборе полюсов приближающего аппарата. В теоремах 2.2 и 2.3 предполагается, что плотность меры μ ведет себя как $(t-1)^\gamma$ при $t \to 1+0$ и даны двусторонние оценки для $\|\widehat{\mu} - s_n\widehat{\mu}\|_C$, при этом верхняя оценка немного хуже наилучшей по порядку (Й.-Е.Андерссон и А.А.Пекарский). Наконец, в теоремах 2.4 и 2.5 этот же вопрос исследуется для случая, когда число полюсов фиксировано и находятся точные асимптотики изучаемых отклонений. Как следствие из этих результатов приводятся точные асимптотики уклонений для некоторых элементарных функций.

В §2.2 и §2.3 рассматривается приближений функций Маркова в случае фиксированного числа q полюсов с помощью некоторых средних операторов $s_n f$. Именно здесь изучается приближение с помощью средних типа Фейера

$$\sigma_{mq,q} f = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} s_{kq,q} f, \quad m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{2}$$

и типа Валле–Пуссена

$$V_{2mq,q} f = \frac{1}{m+1} \sum_{k=m}^{2m} s_{kq,q} f, \qquad m \in \mathbb{N}_0 \tag{3}$$

соответственно. Здесь $s_{kq,q}$ обозначает оператор (1) в случае, когда его множество полюсов есть $A_{kq} = \{a_1, \dots, a_q\}^k$.

В этих параграфах также выводятся интегральные представления для изучаемых уклонений, даются оценки для них, при прежних условиях на меру μ находятся их асимптотики, а также их уточнение в случае оптимального выбора полюсов. Соответствующие результаты приведены в теоремах 2.6–2.9 для средних Фейера и в теоремах 2.10–2.13 для средних Валле–Пуссена. Во всех случаях имеется возможность сравнивать оценки с помощью рациональных приближений и полиномиальными (случай, когда все полюсы находятся в начале координат).

В главе 3 изучается рациональная аппроксимация сопряженных функций. Под сопряженной функцией для f понимается сингулярный интеграл

$$\widehat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

который можно трактовать, как полиномиальный аналог тригонометрически сопряженной функции — свертки с ядром $1/(2\operatorname{tg} t/2)$). Для аппроксимации сопряженной функции естественно использовать соответствующее преобразование операторов (1):

$$\widehat{s}_n f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{s_n f(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{4}$$

которое является рациональной функцией, умноженной на $\sqrt{1-t^2}$. В теореме 3.1 устанавливается необходимое для работы интегральное представление для $\widehat{s}_n f$, с помощью которого выводятся (теорема 3.2) формулы и общие оценки для уклонений $\widehat{f} - \widehat{s}_n f$.

Далее в §3.1 рассматриваются приближения с помощью операторов (4) степенной функции $f_\gamma(t) = (1-t)^\gamma$, $\gamma > 1/2$ нецелое. Теорема 3.2 дает интегральное представление и оценку для уклонений этой функции, а теорема 3.3 дает оценку для равномерной нормы этого уклонения. Кроме того, в теоремах 3.4 и 3.5 изучается асимптотика этих норм в случае фиксированного числа различных полюсов, среди параметров методы приближения.

В §3.2 для сопряженных функций рассматриваются вопросы, подобные изученным в §2.2 и §2.3 для приближений функций Маркова в случае фиксированного числа q полюсов. При этом для сопряженных функций используются естественные аналоги операторов (2) и (3). Интегральное представление для уклонений $\widehat{f} - \widehat{\sigma}_{mq,q} f$ дает теорема 3.6, теорема 3.7 конкретизирует это для функции f_γ, а теорема 3.9 дает асимптотику для ее равномерных уклонений в случае оптимального выбора полюсов.

В §3.3 аналогичные задачи разбираются для приближения сопряженных функций средними типа Валле–Пуссена.

В главе 4 изучаются рациональные приближения интегралов Пуассона

$$P_r\varphi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cos t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\, dt, \quad x = \cos\theta,\ r \in [0,1) \tag{5}$$

с граничной функцией $\varphi \in C[-1,1]$. Результаты этой главы представляют интерес для математической физики, так как интеграл Пуассона (5) являтся решение плоской задачи Дирихле для уравнения Лапласа с граничной функцией φ.

В §4.1 интеграл Пуассона приближается с помощью операторов (1): в теореме 4.1 дается интегральное представление для уклонений и равномерные оценки для них. Далее в теоремах 4.2– 4.4 рассматривается частный случай $\varphi_s(x) = |x|^s$, $s > 0$ не является четным числом. Для этого частного случая приводятся асимптотики для норм уклонений (теорема 4.2), отдельно рассматривается случай фиксированного числа q различных полюсов (теорема 4.3), для $q = 1$ анализируется оптимальный выбор полюса (теорема 4.4).

В §4.2 и 4.3 изучаются приближения интегралов Пуассона с помощью средних Фейера и Валле–Пуссена рациональных операторов Фурье–Чебышева. Здесь характер решаемых задач вполне аналогичен тем, которые рассматривались в предыдущих главах.

В главе 5 рассматривается приближение с помощью рациональных операторов Фурье–Чебышева сингулярных интегралов типа Коши

$$\widehat{f}(x) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2}\, dt \tag{6}$$

с весом Чебышева второго рода.

В §5.1 приводится интегральное представление для уклонений интегралов (6) от их рациональных операторов Фурье–Чебышева (теорема 5.1). Далее рассматривается случай функции $|x|^s$. Здесь полюсы должны удовлетворять определенным соотношения, так как они являются комплексными: некоторое их число раны нулю, а остальные являются комплексно-сопряженными парами. В теореме 5.2 дано интегральное представление уклонений для такого случая, поточечные и равномерные оценки для них. В теоремах 5.3 рассматривается случай фиксированного числа различных полюсов, а в теоремах 5.4–5.6 — случай произвольного числа различных полюсов. В теореме 5.7 обсуждается оптимальный выбор полюсов.

В §5.2 вводится несколько иной аппарат приближения сингулярных интегралов, подобный тому, который рассматривался в главе 3 — приближение ведется с помощью агрегатов вида

$$\widehat{s}_{n+1}f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{s_n f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Теорема 5.9 дает интегральное представление для уклонений $\widehat{f} - \widehat{s}_{n+1}f$. Далее изучается приближение функции $|x|^s$ — теорема 5.10 и теоремы 5.11 5.12 (в двух последних число различных полюсов фиксировано), в теореме 5.13 рассматривается специальный случай полюсов. Теоремы 5.14–5.16 дают оценки для приближений при оптимальном выбора параметров (они подобны результатам из теорем 5.6 и 5.7) .

В §5.2 сингулярные интегралы (6) приближаются «средними Абеля–Пуассона»

$$P_{r,q}f(x) = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k s_{kq,q}f(x),$$

где $s_{kq,q}f$ — операторы (1), обслуживающие случай фиксированного числа q различных полюсов (они уже использовались в главе 2). В классическом гармоническом анализе такие операторы получаются из стандартных средних Абеля–Пуассона (гармоническое продолжение функции в единичный круг) с помощью преобразования Абеля, чтобы в «новых» средних вместо слагаемых ряда участвовали его частичные суммы. В теореме 5.17 приведены интегральные представления для уклонений $\widehat{f} - P_{r,q}\widehat{f}$, далее в теореме 5.18 при специальном подборе множества параметров с этой точки зрения рассматривается функция $|x|^s$ и в теореме 5.19 приведена асимптотика ее равномерных приближений. Теорема 5.20 изучает эти асимптотики при $r \to 1-0$.

В заключительной главе 6 рассматривается приближение функций с помощью средних Зигмунда–Рисса операторов Фурье–Чебышева с q различными полюсами

$$R_{mq,q}f = \frac{1}{(m+1)^2}\sum_{k=}^{m}(2k+1)s_{kq,q}f \tag{7}$$

В §6.1 получено интегральное представление для $R_{mq,q}f$, с помощью которого изучается приближение функции $|x|^s$ в случае q пар чисто мнимых комплексно сопряженных полюсов. В теоремах 6.2 и 6.3 соответственно даются оценки и асимптотики для уклонений $f_s - R_{2mq,2q}f$, в теореме 6.4 эти асимптотики конкретизируются при специальном выборе полюсов.

В §6.2 рассматриваются средние (Рисса) для операторов (1)

$$\frac{1}{(m+1)^2}\sum_{k=0}^{m}(2(m-k)+1)s_{kq,q}f,$$

близкие по внешнему виду к (7). Однако эти операторы существенно отличаются от (7), так как в них суммы $s_{kq,q}f$ с большими k дают больший вклад, чем эти же суммы с меньшими k. Результаты этого параграфа подобны тем, что приводились в §6.1, только в качестве модельной функции сейчас берется $(1-x)^\gamma$.

Отметим несколько моментов, связанных с результатами диссертации. В каждом конкретном случае выясняется, дает ли улучшение используемые методы рациональной аппроксимации по сравнению с полиномиальным случаем. Во многих случаях известные результаты для полиномиального случая, являются следствиями результатов диссертации (см., например, стр. 108, 117, 124, 133, 193). При этом возможности методов приближения, разработанных в диссертации, значительно шире.

Все результаты получены диссертантом самостоятельно и являются новыми. Для решения задач, рассмотренных в диссертации, автору пришлось использовать методы действительного, комплексного и гармонического анализа. Большинство доказательств связаны с существенными техническими сложностями.

Основные результаты диссертации

Для рациональной аппроксимации построены линейные методы суммирования последовательности рациональных операторов Фурье–Чебышева, полюсы которых являются параметрами метода и подбираются для улучшения оценок приближения.

Для классов функций Маркова, сингулярных интегралов с весами Чебышева первого и второго рода, интегралов Пуассона и методов суммирования Фейера, Валле–Пуссена, Рисса и Зигмунда–Рисса, Абеля–Пуассона доказаны

— интегральные представления для приближающих операторов и их уклонений от приближаемых функций,

— оценки и асимптотики для этих уклонений с указанием оптимальных параметров (полюсов),

— асимптотики приближения конкретных функций и сравнение их с полиномиальным случаем.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Результаты диссертации являются обоснованными и достоверными, что подтверждается их полными и строгими доказательствами в соответствии с правилами, принятыми в математике.

Основные результаты диссертации опубликованы в 35 научных работах, в том числе:

19 научные статьи в изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (22,5 авт. л.), среди таких изданий отметим журналы «Алгебра и анализ», «Математический сборник», «Математические заметки», «Известия высших учебных заведений. Математика», «Сибирский математический журнал», «Труды Института математики и механики УрО РАН», индексируемые в базах Scopus и WebOfScience,

14 — статьи в сборниках материалов научных конференций (2,99 авт. л.),

2 — тезисы докладов конференций (0,06 авт. л.). Общий объем опубликованных статей составляет 25,55 авт. л.

Результаты диссертации прошли апробацию на ряде престижных международных математических конференциях и научных семинарах.

Диссертация хорошо оформлена в издательской системе LaTeX, принятой в качестве мирового стандарта для математических текстов.

Научная и практическая значимость результатов диссертации

Диссертационная работа П.Г.Поцейко носит теоретический характер. Ее результаты могут использоваться в дальнейших исследованиях по рациональной аппроксимации, в учебном процессе при чтении специальных курсов по теории приближения функций для обучающихся на математических специальностях, они также могут найти применение в численных методах.

Результаты диссертации могут быть использованы в Белорусском государственном университете, Гродненском государственном университете им. Янки Купалы и Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины.

Практическая значимость подтверждается применением результатов исследований в учебном процессе учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» (акты о внедрении от 17.11.2023 № 03-8/064, 26.11.2024 № 03-8/035).

Замечания

По тексту диссертации имеется несколько замечаний, в основном, редакционного характера.

Имеется ряд опечаток в фамилиях цитируемых математиков. Как примеры укажем, что Дюбуа-Реймон (стр. 14) и Валле–Пуссен (стр. 15) остались без инициалов, Бернштейн (стр. 15) получил лишь один инициал.

На стр. 20 неудачна фраза «Здесь при $r = 1$ мы имеем выпуклую функцию» после неравенства Пекарского. Что она означает?

В теореме 2.3 на стр. 36 вместо «…существует такой набор параметров A^*, что для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ выполняются…» должно быть «…для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такой набор параметров A^*, что выполняются…». Это важно, так как оптимальный набор A^* зависит от n и n не может быть нулем.

На стр. 64 неясна заключительная фраза в замечании 2.3 «набор параметров определяет константу»

На стр. 114, 126, 134 соотношение $f_1(\varphi, x) = \varphi(x)$ следует заменить на следующее $\lim_{r\to 1-0} f_r(\varphi, x) = \varphi(x)$, так как формально $f_1(\varphi, x) = 0$.

На стр. 117 не указано, что такое α (по-видимому, единственный полюс).

В источнике [250] потерян второй автор.

Нет четких разъяснений, почему в одних случаях рассматривается пример $|x|^s$, а в других — $(1 - x)^s$. Например, почему-то сменилась модельная функция при переходе от средних Зигмунда–Рисса к средним Рисса (они к тому же имеют одно и то обозначение) и нельзя сравнить их.

В автореферате на стр. 15–16 приведены результаты о рациональных приближениях функций Маркова с помощью средних Абеля–Пуассона, которые отсутствуют в тексте диссертации, хотя приведенные результаты полностью изложены в работе автора [3-А]. Это — единственное несоответствие автореферата и диссертации.

Приведенные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

Заключение

Диссертационная работа Поцейко Павла Геннадьевича «Рациональные интегральные операторы на отрезке и методы суммирования» является научно-квалификационной работой, которую можно характеризовать как концептуальное развитию теории рациональной аппроксимации и содержат принципиально новые научные результаты, совокупность которых является крупным достижением в соответствующей отрасли науки.

Она соответствует всем требованиям, установленным для диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в пп. 20, 21 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь, утвержденного Указом Президента Республики Беларусь 17.11.2004 г. № 560 (в редакции Указа Президента Республики Беларусь от 02.06.2022 г. № 190), а ее автор Поцейко Павел Геннадьевич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ за

— построение линейных методов суммирования Фейера, Валле–Пуссена, Рисса и Зигмунда–Рисса, Абеля–Пуассона последовательности рациональных операторов Фурье–Чебышева, полюсы которых являются параметрами метода, которые используются для улучшения оценок приближения,

— интегральные представления приближающих операторов и их уклонений от приближаемых функций для классов функций Маркова, сингулярных интегралов с весами Чебышева первого и второго рода, интегралов Пуассона,

— оценки и асимптотики для этих уклонений с указанием оптимальных параметров (полюсов),

— асимптотики приближения конкретных функций и сравнение их с полиномиальным случаем.

ПОДПИСЬ Кротова В.Г. УДОСТОВЕРЯЮ
Начальник управления
организационной работы и
документационного обеспечения
Н.В. Черкасская
«21» 01 2026

20.01.2026

Официальный оппонент:
Вениамин Григорьевич Кротов,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ;
профессор,
профессор кафедры теории функций
Белорусского государственного университета
Адрес: 220030, Республика Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 4, к. 139;
тел. +375-29-6111302; e-mail: vgkrotov@mail.ru