

ОТЗЫВ

научного консультанта

на диссертацию Поцейко Павла Геннадьевича

«Рациональные интегральные операторы на отрезке и методы суммирования» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Поцейко Павел Геннадьевич в 2002 году закончил математический факультет учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по специальности «Математик. Преподаватель математики и информатики». С 2000 года Павел Геннадьевич работал учителем информатики в ГУО «Средняя школа № 30 г. Гродно». В 2003 году Павел Геннадьевич окончил магистратуру УО ГрГУ им. Я. Купалы по специальности «01.01.01 – математический анализ» с присуждением степени магистра естественных наук. С 2016 года соискатель на кафедре фундаментальной и прикладной математики УО ГрГУ им. Я. Купалы. В 2020 году Павел Геннадьевич закончил обучение в аспирантуре УО ГрГУ им. Я. Купалы по специальности «01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ», защитил кандидатскую диссертацию и в этом же году ему была присуждена степень кандидата физико-математических наук. С 2020 года по настоящее время работает на кафедре Фундаментальной и прикладной математики в должности доцента. С 2023 года по настоящее время проходит обучение в докторантуре УО ГрГУ им. Я. Купалы по специальности «01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ». В 2024 году Павлу Геннадьевичу присуждено ученое звание «доцент». С января 2004 года по январь 2005 года Павел Геннадьевич проходил службу в пограничных войсках Республики Беларусь. С 2005 года работает в должности администратора системного отдела компьютеризации ОАО «Гродножилстрой». За время учебы в университете, а также в процессе обучения в магистратуре, аспирантуре и докторантуре П. Г. Поцейко постоянно повышал свой уровень в математических дисциплинах, совершенствовал умения и навыки в математической подготовке, а также проявлял инициативу, самостоятельность и настойчивость в решении поставленных задач. Научная квалификация П. Г. Поцейко, без сомнения, соответствует требованиям, предъявляемым к соискателям ученой степени доктора физико-математических наук.

Результаты квалификационной работы П. Г. Поцейко относятся к теории рациональной аппроксимации, которая, как одна из важнейших ветвей математического анализа, нашла широкое применение в различных областях математики и ее приложениях. Задачи аппроксимаций сложных объектов посредством более простых имеют важное значение в различных областях математики и ее приложениях. Объектами аппроксимации во многих случаях выступают конкретные функции или функциональные классы, интегрируемых непрерывных дифференцируемых аналитических и других функций. Методы приближений в большинстве случаев основаны на тригонометрических и алгебраических полиномах или рациональных функциях. Одним из хорошо изученных направлений в полиномиальной аппроксимации являются ряды Фурье. Представление функции в виде суммы тригонометрических функций значительно упрощает изучение множества математических моделей в физике, химии, биологии и других направлений. Во многом благодаря этому ряды Фурье являются одним из наиболее естественных аппаратов в теории приближений и оказывают огромное влияние на ее развитие. Вместе с тем, рациональные ряды Фурье, как метод аппроксимации в отличие от полиномиального случая не получили широкого применения и до сих пор остаются не исследованными в полной мере. Отсюда естественным образом возникает задача разработки методов рациональных приближений, основанных на рядах Фурье и методах их суммирования, которые, с одной стороны, являлись бы достаточно простыми по конструкции, а с другой – обеспечивали бы необходимый порядок аппроксимации.

С. Такенака (1925) и Ф. Мальмквист (1925) ввели ортогональную систему рациональных функций на единичной окружности, обобщающую основную тригонометрическую систему. М. М. Джрбашян (1956) построил рациональные ряды Фурье по этой системе, нашел интеграл Дирихле и установил аналоги признаков Жордана – Дирихле и Дини – Липшица при условии, что полюсы рациональных функций не имеют предельных точек на единичной окружности. В. Н. Русак (1964, 1974, 1977), основываясь на представлении ядра Дирихле, построил рациональные интегральные операторы Фейера, Валле Пуссена и Джексона на вещественной оси, восходящие своими корнями к классическим методам суммирования тригонометрических рядов Фурье, и применил их для доказательства некоторых прямых теорем рациональной аппроксимации. Исследования В. Н. Русака были продолжены в работах его учеников Н. К. Агафоновой, В. Н. Рыбаченко, Н. В. Гриба. Е. А. Ровба (1979, 1996, 1998) ввел на отрезке $[-1, 1]$ рациональные интегральные операторы типа Фурье, Фейера, Валле Пуссена и Джексона, являющиеся естественным обобщением соответствующих операторов Фурье, Фейера, Валле Пуссена и Джексона, ассоциированных с полиномами Чебышёва первого рода. Эта тематика получила некоторое продолжение в работах его учеников К. А. Смотрицкого, Е. Г. Микулича. Вместе с тем введенные В. Н. Русаком и Е. А. Ровбой рациональные интегральные операторы в общем случае не являются методами суммирования рядов Фурье. Несмотря на это, в последние годы ортогональные системы рациональных функций и рациональные ряды Фурье вызывают большой интерес у исследователей как с точки зрения теоретической, так и с точки зрения их приложений, в частности, в физике сигналов.

Целью диссертационной работы является развитие методов рациональной аппроксимации, базирующихся на применении рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и методов их суммирования на различных классах непрерывных функций на отрезке, а также поиск новых классов непрерывных функций, отражающих особенности рациональной аппроксимации. Для достижения поставленной цели были поставлены следующие задачи исследования:

1. Введение новых методов рациональных аппроксимаций на отрезке, основанных на суммировании рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с треугольными матрицами коэффициентов, соответствующих методам суммирования Фейера, Валле Пуссена, Абея – Пуассона, Рисса и Зигмунда – Рисса;
2. Введение сопряженного рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва, его сумм Фейера, Валле Пуссена и Абея – Пуассона и изучение аппроксимационных свойств введенных методов рациональной аппроксимации на классах сопряженных функций;
3. Нахождение наилучших оценок равномерных рациональных приближений на классах функций со степенной особенностью, функций Маркова, интегралов Пуассона на отрезке, функций, задаваемых сингулярным интегралом с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва и введенными методами рациональной аппроксимации;

Диссертационная работа состоит из введения, общей характеристики работы, шести глав, заключения и списка использованной литературы. Введение содержит обоснование актуальности темы исследования. Общая характеристика работы содержит цель и задачи исследования, а также всю необходимую информацию о диссертации. **Первая глава** содержит аналитический обзор литературы по теме исследования и основные результаты, относящиеся к аппроксимациям на классах функций со степенной особенностью, функций Маркова, сопряженных функций, интегралов Пуассона, сингулярных интегралов на отрезке с ядром Коши. **Во второй главе** проводится построение сумм Фейера, Валле Пуссена, Абея – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с фиксированным количеством геометрически различных полюсов и исследуются аппроксимации рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва и

введенными методами на классах функций Маркова. Для каждого из методов рациональной аппроксимации устанавливаются интегральные представления приближений, оценки сверху равномерных приближений и оптимальные значения параметров аппроксимирующих рациональных функций, при которых достигаются наилучшие оценки равномерных рациональных приближений на классах функций Маркова с мерой, производная которой асимптотически представляет собой функций со степенной особенностью. **В третьей главе** проводится построение сопряженного рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва, его сумм Фейера, Валле Пуссена и Абеля – Пуассона с фиксированным количеством геометрически различных полюсов и исследуются аппроксимации рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва и введенными методами рациональной аппроксимации на классах сопряженных функций. Для каждого из методов аппроксимации устанавливаются интегральные представления приближений, оценки сверху приближений и оптимальные значения параметров аппроксимирующих рациональных функций, при которых достигаются наилучшие оценки равномерных рациональных приближений на классах сопряженных функций с плотностью, имеющей степенную особенность. **В четвертой главе** исследуются аппроксимационные свойства рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва, его сумм Фейера и Валле Пуссена на классах функций, задаваемых интегралами Пуассона на отрезке $[-1, 1]$, ассоциированными с системой полиномов Чебышёва первого рода. Устанавливаются интегральные представления приближений и оценки сверху равномерных приближений. В качестве следствий полученных выше результатов, найдены асимптотические оценки точных верхних граней уклонений частичных сумм полиномиального ряда Фурье – Чебышёва, а также сумм Фейера и Валле Пуссена на классах интегралов Пуассона на отрезке. В случае, когда граничная функция интегралов Пуассона имеет особенность, степенного типа, исследуются аппроксимации указанными методами с двумя геометрически различными параметрами. Найдены оптимальные значения этих параметров, при которых равномерные рациональные аппроксимации этого класса функций имеют наибольшую скорость убывания. **В пятой главе** исследуются рациональные аппроксимации на классах функций, задаваемых сингулярным интегралом на отрезке $[-1, 1]$ с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода. При этом применяется рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, его суммы Абеля – Пуассона и новый метод рациональных аппроксимаций, представляющий собой образ рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва при преобразовании сингулярным интегралом. Устанавливаются интегральные представления приближений. Исследуются равномерные рациональные приближения как с фиксированным количеством геометрически различных параметров, так и приближения рациональными функциями с полюсами, представляющими собой некоторые модификации «ньюменовских» параметров. Для каждого из методов рациональных аппроксимаций найдены наилучшие оценки равномерных приближений на изучаемом функциональном классе. **В шестой главе** проводится построение сумм Рисса и Зигмунда – Рисса рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Устанавливаются интегральные представления введенных методов рациональных аппроксимаций. Исследуются аппроксимации функций со степенной особенностью рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с произвольным количеством полюсов и каждым из введенных методов. Найдены соответствующие оптимальные значения параметров, при которых обеспечиваются наилучшие оценки сверху равномерных рациональных приближений.

Изложение материала в диссертационной работе проведено логично и последовательно. Все полученные результаты доказаны, а сделанные выводы обоснованы.

Все полученные результаты являются новыми.

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в исследованиях по теории аппроксимации функций, численных методах. Также возможно их применение для решения конкретных задач вычислительной математики и при чтении спецкурсов на математических факультетах.

Результаты, представленные в диссертации, опубликованы в 35 научных работах, из них 19 – статьи в научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (22,5 авт. л.), 14 – статьи в сборниках материалов научных конференций (2,99 авт. л.) и 2 – тезисы докладов конференций (0,06 авт. л.).

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях: XXVII международной конференции «Математика. Экономика. Образование»; XI международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 27 мая – 3 июня 2021 г.); International Conference «Approximation Theory and Applications» dedicated to the 100-th anniversary of S. B. Stechkin (Moscow, 5 – 11 September, 2021); Международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 22–25 ноября 2021 г.); XXVIII Международной конференции «Математика. Экономика. Образование»; XI международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 27 мая – 3 июня 2022 г.); International Conference «Complex Analysis and Related Topics» (Kazan, June 30 – July 4, 2022.); Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 27 января – 1 февраля 2023 г.); XXIV международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, 26–27 мая 2023 г.); XXIX международной конференции «Математика. Экономика. Образование»; XI Международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Ростов-на-Дону–Таганрог, 27 мая – 3 июня 2023 г.); XVI Международной Казанской школо-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 22–27 августа 2023 г.); 22-й международной Саратовской зимней школе, посвященной 300-летию РАН «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 28 января – 31 января 2024 г.); Международной научной конференции «Мухтаровские чтения: актуальные проблемы математики, методики ее преподавания и смежные вопросы» (Махачкала, 23–24 апреля 2024 г.); XXX Международной конференции «Математика. Экономика. Образование»; XIV Международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Ростов-на-Дону–Таганрог, 27 мая – 3 июня 2024 г.); Международной конференции «Комплексный анализ и теория приближений», посвященной 90-летней годовщине со дня рождения профессора Е. П. Долженко (Москва, 27–28 сентября 2024 г.); Международной Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 30 января – 4 февраля 2025 г.), научном семинаре кафедры теории функций «Белорусского государственного университета» (руководитель семинара: доктор физико-математических наук, профессор В. Г. Кротов) (Минск, 19 мая 2025 г.); Международной конференции «Теория функций и её приложения» посвященной 120-летию со дня рождения академика РАН С. М. Никольского (Москва, 1–5 Июля 2025 г.); Научном семинаре кафедры математического анализа «Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины» (руководитель семинара: доктор физико-математических наук, профессор А. Р. Миротин) (Гомель, 15 сентября 2025 г.); Научном семинаре «Конструктивная теория функций» «Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН» (руководитель семинара: доктор физико-математических наук, профессор М. А. Скопина) (Санкт-Петербург, 13–октября 2025 г.).

Считаю, что Поцейко Павел Геннадьевич заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук за следующие результаты:

4. Суммы Фейера, Валле Пуссена, Абея – Пуассона, Рисса и Зигмунда – Рисса рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и интегральные представления приближений построенными методами на классах функций со степенной

особенностью, функций Маркова, интегралов Пуассона на отрезке, функций, задаваемых сингулярным интегралом с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода;

5. Сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, его суммы Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона и интегральные представления приближений построенными методами на классах сопряженных функций на отрезке;

6. Оценки равномерных приближений рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва, его суммами Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса и Зигмунда – Рисса на классах функций со степенной особенностью, а также на классах функций Маркова, интегралов Пуассона на отрезке, функций, задаваемых сингулярным интегралом с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, у которых соответственно производная меры, граничная функция и плотность представляют собой функции со степенной особенностью;

7. Наилучшие оценки равномерных приближений сопряженными рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва, их суммами Фейера, Валле Пуссена и Абеля – Пуассона на классах сопряженных функций на отрезке $[-1, 1]$ с плотностью, имеющей степенную особенность;

8. Эффективные оценки сверху равномерных приближений рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с полюсами «ньюеновского» вида на классах функций Маркова, функций, задаваемых сингулярными интегралами с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, функций со степенной особенностью.

Научный консультант
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры фундаментальной
и прикладной математики
ГрГУ им. Я. Купалы



Е. А. Ровба

