

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертации Маковецкой Ольги Александровны
«Периодическая краевая задача для обобщения
матричного дифференциального уравнения Риккати»,
представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

**Соответствие содержания диссертации специальностям и отрасли
науки, по которым она представлена к защите**

Диссертационная работа О.А. Маковецкой посвящена исследованию разрешимости двухточечной краевой задачи существенно нелинейного матричного дифференциального уравнения, правая часть которого допускает выделение линейных и квадратичных членов, нахождению области существования и построению решений. В первой главе приведен краткий обзор литературы по теме исследования и указаны основные методы исследования. В последующих главах, в зависимости от вида вырождения линейных коэффициентов, реализуются различные регуляризующие приемы, позволяющие решать поставленную задачу в невырожденных случаях. В приложениях, кроме дополнительных выкладок, приводятся результаты численных экспериментов для иллюстрации полученных результатов на модельных примерах.

Таким образом, содержание диссертации несомненно соответствует специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Актуальность темы диссертации

В 1723 г. итальянский математик и механик Риккати Якопо Франческо впервые исследовал обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x' + ax^2 = bt^\alpha, \quad x = x(t), \quad a, b, \alpha - \text{const.}$$

Решение даже такого, казалось бы несложного, уравнения, названного впоследствии *специальным уравнением Риккати*, записывается с помощью цилиндрических функций. *Общим уравнением Риккати* (скалярным) называют уравнение вида (с точностью до постоянных множителей коэффициентов)

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

где $a(t), b(t), c(t)$ – непрерывные функции. По аналогии, дифференциальное уравнение вида

$$X' = A(t)X + XB(t) + XC(t)X + D(t),$$

с матричными коэффициентами и искомой функцией согласованных размерностей было названо *матричным дифференциальным уравнением Риккати (МДУР)*.

Частными случаями МДУР являются линейные уравнения: дифференциальный аналог матричного алгебраического уравнения Сильвестра

$$X' = A(t)X + XB(t) + D(t),$$

которое общепринятого, устоявшегося названия, насколько известно, не имеет и дифференциальный аналог матричного алгебраического уравнения Ляпунова

$$X' = A(t)X + XA^T(t) + D(t),$$

которое называют *матричным дифференциальным уравнением Ляпунова*. Как видим, в этом уравнении, в отличие от предыдущего, линейные коэффициенты не произвольны, а сопряжены.

Интерес к МДУР обусловлен его многочисленными применениями в теории линейных систем, вариационного исчисления, оптимального управления, стабилизации управляемых систем и др. В частности:

- i) решение линейной матричной системы

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + D(t)Z, \\ Z' = -C(t)Y - B(t)Z \end{cases}$$

связано с решением МДУР соотношением $Y(t) = X(t)Z(t)$.

- ii) оптимальное управление в задаче минимизации некоторого функционала на решениях линейной системы управления выражается через решение соответствующего МДУР с граничным условием.
- iii) в задачах управления на бесконечном временном промежутке в случае периодических коэффициентов системы приоритетным является вопрос о существовании периодических решений МДУР и способах приближенного построения таких решений.

Последнее обстоятельство имеет непосредственное отношение к основному объекту исследования рассматриваемой диссертационной работы, а именно, периодической краевой задаче

$$X' = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t, X), \quad X(0) = X(\omega),$$

вопросы существования и построения решения которой оставались не изученными. Сказанное свидетельствует об актуальности темы диссертации.

Степень новизны результатов, полученных в диссертации, и научных положений, выносимых на защиту

Представленные в диссертации результаты, а также выносимые на защиту положения являются новыми в области решения краевых задач. Отличительная особенность работы от предыдущих по этой тематике состоит в

том, что в ее основу положены способы регуляризации исходной задачи, в рамках которых применяются различные вычислительные схемы построения решений. Такой подход позволил провести сравнительный анализ эффективности этих схем.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Выводы диссертационной работы основаны на четко сформулированных и строго доказанных теоремах, что свидетельствует об их достоверности. Полученные результаты проиллюстрированы на простых модельных примерах.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию

Результаты диссертации относятся к фундаментальной области исследований и носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теории периодических колебаний, а также при чтении спецкурсов по конструктивным методам решения краевых задач.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати

Результаты диссертации достаточно полно опубликованы в 34 научных работах, среди которых 7 статей в рецензируемых научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, 3 статьи без соавторов.

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК

Диссертация оформлена в соответствии с требованиями ВАК РБ, предъявляемым к оформлению кандидатских диссертаций. Автореферат достаточно полно и правильно отражает ее содержание. Имеющиеся недочеты отмечены в замечаниях.

Замечания по диссертации

1. При описании основного объекта исследования работы, т.е. уравнения (2.1), не приводится мотивация выделения слагаемого $XQ(t)X$, поскольку используемые алгоритмы связаны только с регуляризацией на основе линейных членов.

2. В уравнении (2.1) присутствует нелинейность $F(t, X)$ достаточно общего вида, которая непрерывна в некоторой области, тождественно отлична от нуля при нулевом значении фазовой переменной и по этой переменной

локально липшицева. Дальнейшие ограничения на $F(t, X)$ имеют неявный характер в виде неравенств, содержащих ее константу Липшица и оценку нормы. По-видимому, некоторое априорное (до проверки соответствующих неравенств) описание класса функций $F(t, X)$ позволило бы представить объект исследования более прозрачным. Возможно ли такое описание? Может ли нелинейность $F(t, X)$ в правой части уравнения (2.1) содержать члены, подобные членам, выделенным явно?

3. В подразделе 2.1.5 иллюстрация применения полученных результатов продемонстрирована на примере уравнения (2.57). Выбор такого иллюстрирующего примера является неудачным, поскольку в нем функция $F(t, X)$ не зависит от X и поэтому уравнение является МДУР. То же самое относится и к остальным иллюстрирующим примерам.

4. Фраза на с.19 «Приведенные теоремы дают не только область существования изолированного решения краевой задачи, но и оценки области его локализации» требует пояснений.

5. На с.29 в конце формулы без номера, предшествующей оценке (2.33), знак равенства «тождественно» излишен, поскольку слева находится не функция, а константа.

6. В работе неоднократно фигурируют термины: «простая вычислительная схема» (с. 28), «сравнительно простые вычислительные операции» (с.36), «достаточно простые вычислительные процедуры» (с.37), «достаточно точное решение» (с.39), «вычислительные операции алгоритмов сравнительно просты» (с.52) и др. Необходимо пояснить, что под ними понимается.

7. На с. 21 в предложении « В этих алгоритмах используется вычислительная схема классического метода последовательных приближений, а также неявная и явная вычислительные схемы соответственно» непонятно к чему относится слово «соответственно».

8. В тексте работы неоднократно встречается фраза «...аналитическая структура точного и приближённых решений...». Что в ней понимается под «аналитической структурой»?

9. На с.6 автореферата фраза «... связана с построением решения матричного алгебраического уравнения Ляпунова...» не вполне корректна, поскольку в работах упоминаемых далее авторов (за исключением А.М. Ляпунова), в действительности, рассматривалось матричное уравнение Сильвестра.

Следует отметить, что указанные замечания в целом не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую он претендует

Приведенные в диссертационной работе результаты и применяемые для их получения методы исследования свидетельствуют о научной квалификации автора, соответствующей учёной степени кандидата физико-математических наук.

Вывод о соответствии диссертации установленным требованиям (пп. 20, 21 Положения о присуждении ученых степеней и присвоения ученых званий в Республике Беларусь)

Таким образом, диссертационная работа Маковецкой Ольги Александровны «Периодическая краевая задача для обобщения матричного дифференциального уравнения Риккати», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» является законченной квалификационной научной работой и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Республики Беларусь к кандидатским диссертациям, а ее автор в соответствии с пп. 20, 21 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоения ученых званий в Республике Беларусь» заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук за:

- достаточные условия существования и единственности решения периодической краевой задачи для обобщения матричного дифференциального уравнения Риккати в различных невырожденных случаях;
- алгоритмы построения решения исследуемой краевой задачи;
- оценки области локализации построенных решений.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник отдела
дифференциальных уравнений
государственного научного учреждения
«Институт математики Национальной
академии наук Беларуси»

 А.К. Деменчук

10.12.2023 г.

Подпись Деменчука А.К. заверяю
Ученый секретарь Института математики
НАН Беларуси Т.С.Бусел

